



УДК 539.3

© 2008

И. А. Гузь, А. В. Меньшиков, В. А. Меньшиков

### О предельном переходе в динамической задаче для межфазной трещины при уменьшении частоты нагрузки

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

*The dependence of a numerical solution of the problem on an interface crack between elastic dissimilar media on the frequency of a harmonic loading is studied. It is shown that the solution of the dynamic problem with decreasing frequency converges to that of the static one.*

Хорошо известно, что решения динамических задач теории упругости и механики деформируемого твердого тела при устремлении частоты нагружения к нулю стремятся к соответствующим статическим (зачастую — аналитическим) решениям, что позволяет использовать последние для проверки истинности получаемых численных динамических решений [1, 2]. В работах [3, 4] динамическая задача о трещине на поверхности раздела упругих полупространств была сведена к системе граничных интегральных уравнений с гиперсингулярными ядрами. В работе [5] впервые получено численное решение задачи теории упругости для круговой трещины в плоскости раздела материалов под действием гармонической нагрузки.

Настоящая работа посвящена исследованию сходимости численного решения динамической задачи о стационарной плоской круговой трещине на границе раздела линейно-упругих, однородных и изотропных материалов при уменьшении частоты нагрузки к решению ее статического аналога.

**Постановка задачи.** Рассмотрим подверженное гармоническому нагружению составное бесконечное тело, состоящее из двух линейно-упругих однородных изотропных полупространств, которые плотно сцеплены вдоль общей поверхности всюду, за исключением круговой области. Последнюю будем ассоциировать с трещиной-расслоением, противоположные берега которой принадлежат различным материалам. Положим, что трещина является стационарной, т. е. ее фронт неподвижен.

Как было упомянуто выше, система граничных интегральных уравнений для рассматриваемой задачи получена в работах [3, 4]. Интегральные уравнения содержат ядра четырех

типов, которые являются фундаментальными решениями теории упругости. В рассматриваемом в настоящей работе случае гармонического нагружения и плоской межфазной поверхности эти интегральные ядра имеют следующий вид [4]:

$$\begin{aligned}
U_{jj}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) &= \frac{1}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)r} \left[ (\lambda + 3\mu) + \frac{(\lambda + \mu)(y_j - x_j)^2}{r^2} \right] + \\
&+ \frac{1}{4\pi\mu r} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+2)} \left[ l_1^n \frac{c_2^2}{c_1^2} + l_2^n (n+1) + \frac{(n-1)(y_j - x_j)^2}{r^2} \left( l_1^n \frac{c_2^2}{c_1^2} - l_2^n \right) \right], \\
U_{12}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) &= U_{21}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = \frac{(\lambda + \mu)(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)r^3} + \\
&+ \frac{(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)}{4\pi\mu r^3} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{n!(n+2)} \left( l_1^n \frac{c_2^2}{c_1^2} - l_2^n \right), \\
U_{33}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) &= \frac{(\lambda + 3\mu)}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)r} + \frac{1}{4\pi\mu r} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+2)} \left[ l_1^n \frac{c_2^2}{c_1^2} + l_2^n (n+1) \right], \\
W_{j3}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) &= \frac{\mu(y_j - x_j)}{4\pi(\lambda + 2\mu)r^3} - \frac{(y_j - x_j)}{4\pi r^3} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{n!(n+2)} \left( l_1^n \frac{2c_2^2}{c_1^2} + l_2^n n \right), \\
W_{3j}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) &= -\frac{\mu(y_j - x_j)}{4\pi(\lambda + 2\mu)r^3} - \frac{(y_j - x_j)}{4\pi\mu r^3} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{n!(n+2)} \left[ l_1^n (\lambda n + 2\lambda + 2\mu) \frac{c_2^2}{c_1^2} - l_2^n 2\mu \right], \\
K_{j3}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) &= -\frac{\mu(y_j - x_j)}{4\pi(\lambda + 2\mu)r^3} + \frac{(y_j - x_j)}{4\pi r^3} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{n!(n+2)} \left( l_1^n \frac{2c_2^2}{c_1^2} + l_2^n n \right), \\
K_{3j}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) &= \frac{\mu(y_j - x_j)}{4\pi(\lambda + 2\mu)r^3} + \frac{(y_j - x_j)}{4\pi\mu r^3} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{n!(n+2)} \left[ l_1^n (\lambda n + 2\lambda + 2\mu) \frac{c_2^2}{c_1^2} - l_2^n 2\mu \right], \\
F_{jj}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) &= \frac{\mu^2}{2\pi(\lambda + 2\mu)r^3} + \frac{3\lambda\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{(y_j - x_j)^2}{r^5} - \frac{\mu}{2\pi r^3} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{n!(n+2)} \left( l_1^n \frac{2c_2^2}{c_1^2} + l_2^n n \right) - \\
&- \frac{\mu}{4\pi} \frac{(y_j - x_j)^2}{r^5} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)(n-3)}{n!(n+2)} \left[ l_1^n \frac{4c_2^2}{c_1^2} + l_2^n (n-2) \right], \\
F_{12}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) &= F_{21}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = \frac{3\lambda\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)}{r^5} - \\
&- \frac{\mu}{4\pi} \frac{(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)}{r^5} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)(n-3)}{n!(n+2)} \left[ l_1^n \frac{4c_2^2}{c_1^2} + l_2^n (n-2) \right], \\
F_{33}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) &= \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2\pi(\lambda + 2\mu)r^3} - \\
&- \frac{1}{4\pi\mu r^3} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{n!(n+2)} \left\{ l_1^n [\lambda(\lambda n + 4\mu)(n+2) + 12\mu^2] \frac{c_2^2}{c_1^2} + l_2^n 4\mu^2 (n-1) \right\},
\end{aligned}$$

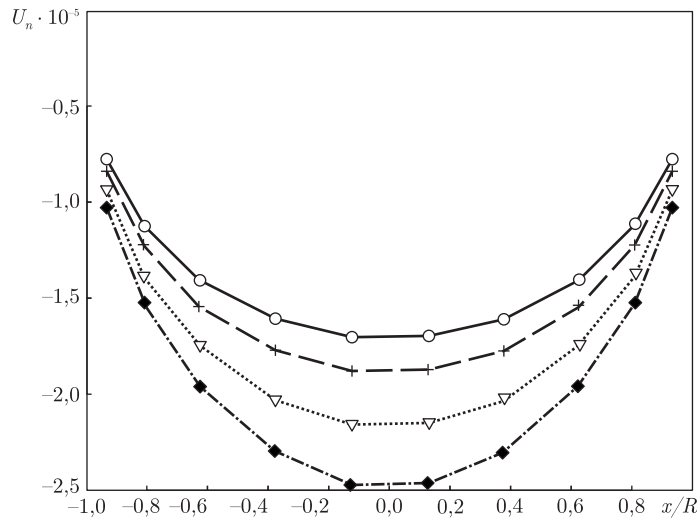


Рис. 1

$$U_{13}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = U_{23}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = U_{31}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = U_{32}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = 0,$$

$$W_{11}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = W_{12}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = W_{21}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = W_{22}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = W_{33}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = 0,$$

$$K_{11}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = K_{12}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = K_{21}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = K_{22}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = K_{33}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = 0,$$

$$F_{13}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = F_{23}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = F_{31}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = F_{32}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = 0.$$

Здесь  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ламе;  $r$  — расстояние между точками  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ ,  $l_1 = i\omega r/c_1$ ,  $l_2 = i\omega r/c_2$ ;  $i$  — мнимая единица;  $\omega$  — круговая частота;  $c_1$  и  $c_2$  — скорости продольных и поперечных волн,  $j = 1, 2$ .

Отметим, что в представленных выражениях для интегральных ядер явно выделены статические и динамические части, что существенно упрощает регуляризацию и численное вычисление соответствующих расходящихся интегралов.

**Расчетные исследования.** На основе метода граничных элементов в работе [5] получено численное решение задачи теории упругости для составного тела сталь — алюминий с круговой межфазной трещиной радиусом  $R$  под воздействием гармонической волны растяжения — сжатия, распространяющейся перпендикулярно к плоскости раздела сред.

Исследуем поведение полученного динамического решения в зависимости от величины приведенного волнового числа  $k_2R$  на интервале  $[0, 1]$  при стремлении  $k_2R$  к нулю (здесь  $k_2 = \omega/c_2$  — волновое число;  $c_2$  — скорость поперечных волн в стали). При этом все прочие параметры задачи и сетки граничных элементов остаются неизменными. В частности, для стали: модуль упругости  $E = 207$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,288$ , плотность  $\rho = 7860$  кг/м<sup>3</sup>; для алюминия: модуль упругости  $E = 70$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,347$ , плотность  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>.

На рис. 1, 2 представлены распределения максимальных на периоде нагружения нормальных и касательных перемещений одного из берегов трещины вдоль диаметра трещины при уменьшении параметра  $k_2R$  от 1,0 до 0,001 в сравнении с решением статической задачи, которое получено нами численно при  $k_2R = 0$ . Звездочки — решение при  $k_2R = 1,0$ , треугольники — при  $k_2R = 0,75$ , крестики — при  $k_2R = 0,5$ , кружки — при  $k_2R = 0,001$ , сплошная линия — решение статической задачи.

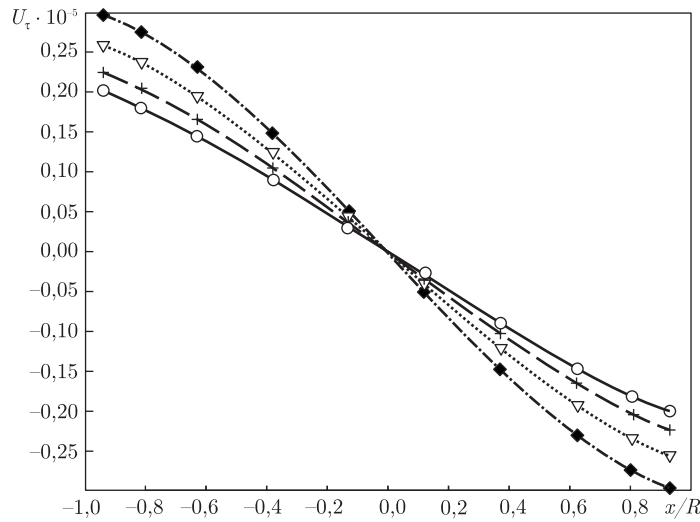


Рис. 2

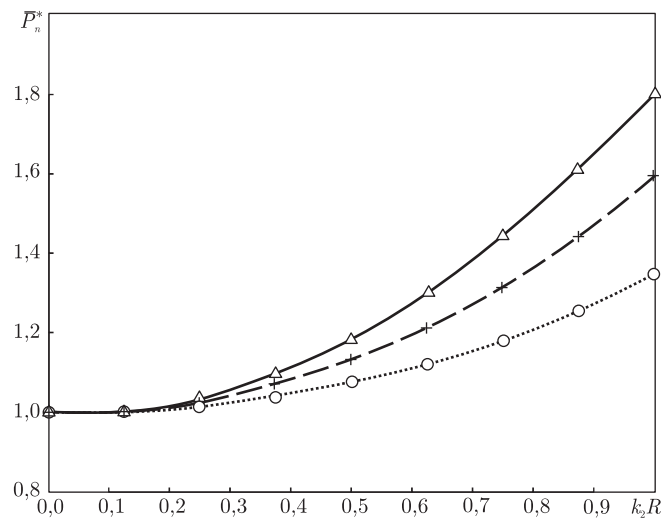


Рис. 3

На рисунках 3 и 4 представлены зависимости максимальных на периоде нагружения нормальных и тангенциальных усилий на сцепленных поверхностях от приведенного волнового числа на разном удалении от фронта трещины, нормированных соответствующим аналитическим статическим решением, полученным В. И. Моссаковским и М. Т. Рыбкой в работе [6]. Здесь использованы следующие обозначения: треугольники — усилия при относительном удалении от вершины трещины вдоль нормали к ее фронту на расстояние  $x/R = 0,375$ , крестики — на  $x/R = 0,1875$ , кружки — на  $x/R = 0,0625$ .

Графики, соответствующие оставшимся компонентам решения задачи, не приводятся из-за ограниченности объема настоящей работы, однако характер их распределения аналогичен приведенным.

Таким образом, анализ результатов расчетов показывает, что решение рассматриваемой динамической задачи теории упругости для составного тела со стационарной дискообразной трещиной на границе раздела сред при частоте нагружения, стремящейся к нулю, стремится

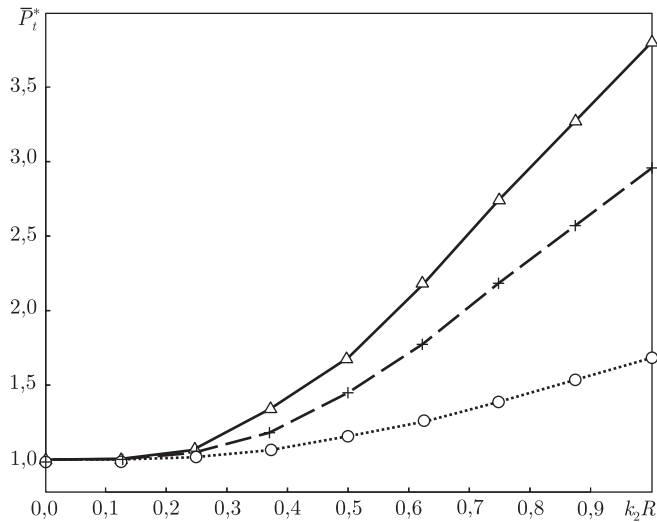


Рис. 4

к решению соответствующей статической задачи. Полученные результаты свидетельствуют о применимости использованного в настоящей работе метода при решении динамических задач теории упругости для составных тел с трещинами.

1. Гузь А. Н., Зозуля В. В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках: Неклассические проблемы механики разрушения: В 4т. / Под ред. А. Н. Гузя – Т. 4. Кн. 2. – Киев: Наук. думка, 1993. – 236 с.
2. Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. С. Атлури. – Москва: Мир, 1990. – 392 с.
3. Меньшиков В. А., Меньшиков А. В. Гранично-контактные интегральные уравнения динамической задачи теории упругости о трещине на поверхности раздела полупространств // Доп. НАН України. – 2006. – № 6. – С. 51–56.
4. Меньшиков В. А. Сингулярные ядра интегральных уравнений в задаче о трещине на границе раздела полупространств при гармоническом нагружении // Там само. – № 11. – С. 58–62.
5. Меньшиков В. А. Круговая трещина в плоскости раздела упругих материалов под действием нормальной гармонической нагрузки // Теорет. и прикл. механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 166–170.
6. Моссаковский В. И., Рыбка М. Т. Обобщение критерия Гриффитса–Снеддона на случай неоднородного тела // Прикл. математика и механика. – 1964. – 28. – С. 1061–1069.

Центр микро- и наномеханики “СЕМINACS”,  
 Абердинский университет, Шотландия  
 Институт механики им. С. П. Тимошенко  
 НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 11.09.2007