

А. В. Меньшиков, И. А. Гузь

## Учет трения при гармоническом нагружении круговой трещины

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

*We study the dependence of the stress intensity factors (transverse and longitudinal shear modes) on the magnitude of the friction coefficient for a flat penny-shaped crack under oblique harmonic loading.*

При решении задач о гармоническом нагружении тел с трещинами, как правило, предполагают [1], что противоположные берега трещин перемещаются относительно друг друга, последовательно проходя фазы растяжения и сжатия, при этом допускается взаимное проникновение берегов трещин при сжатии. В то же время очевидно, что в реальном материале берега трещин всегда взаимодействуют между собой, а взаимопроникновение берегов — невозможно. На поверхности трещин в области контакта берегов возникают изменяющиеся во времени и зависящие от величины коэффициента трения подобласти сцепления и скольжения, в которых противоположные берега трещин удерживаются силами трения или движутся относительно друг друга со скоростью, зависящей от величины вектора контактных сил.

В настоящей работе с использованием метода, предложенного в работе [2], рассматривается пространственная динамическая задача для материала с плоской круговой трещиной под воздействием гармонической волны растяжения — сжатия, распространяющейся под углом к поверхности трещины. Исследуется влияние величины силы трения на распределение коэффициентов интенсивности напряжений поперечного и продольного сдвига.

**Постановка задачи.** Рассмотрим трехмерное линейно упругое, однородное и изотропное пространство, содержащее плоскую круговую трещину без начального раскрытия. Введем прямоугольную декартову систему координат, оси  $Ox_1$  и  $Ox_2$  которой лежат в плоскости трещины, а ось  $Ox_3$  перпендикулярна ее плоскости. Под углом  $\alpha$  к поверхности трещины распространяется с частотой  $\omega$  и амплитудой  $\Phi_0$  гармоническая волна растяжения — сжатия, описываемая функцией

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0 e^{i(k_1(x_1 \cos \alpha + x_3 \sin \alpha) - \omega t)}.$$

Здесь  $i$  — мнимая единица;  $k_1 = \omega/c_1$  — обобщенное волновое число;  $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  — скорость распространения в материале продольных волн;  $\lambda$  и  $\mu$  — постоянные Ламе;  $\rho$  — плотность материала.

В процессе деформации тела противоположные берега трещины взаимодействуют между собой, а в не известной заранее области контакта берегов возникают отличные от нуля силы контактного взаимодействия  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ . Таким образом, нагрузка на берегах трещины имеет следующий вид:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t) + \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, T],$$

где нагрузка, вызванная падающей волной,

$$\mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} -k_1^2 \Phi_0 \mu \sin 2\alpha (\cos(k_1 x_1 \cos \alpha) \cos(\omega t) - \sin(k_1 x_1 \cos \alpha) \sin(\omega t)) \\ 0 \\ -k_1^2 \Phi_0 (\lambda + 2\mu \sin^2 \alpha) (\cos(k_1 x_1 \cos \alpha) \cos(\omega t) - \sin(k_1 x_1 \cos \alpha) \sin(\omega t)) \end{pmatrix}.$$

На берегах трещины для нормальных и касательных компонент векторов сил контактного взаимодействия и разрыва перемещений должны выполняться односторонние ограничения Синьорини

$$\Delta u_3(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad q_3(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad \Delta u_3(\mathbf{x}, t) q_3(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

и закон трения Кулона

$$\begin{aligned} |q_1(\mathbf{x}, t)| < k_\tau q_3(\mathbf{x}, t) &\implies \partial_t \Delta u_1(\mathbf{x}, t) = 0, \\ |q_1(\mathbf{x}, t)| = k_\tau q_3(\mathbf{x}, t) &\implies \partial_t \Delta u_1(\mathbf{x}, t) = -\lambda_\tau q_1(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2)$$

где  $k_\tau$  — коэффициент трения, а  $\lambda_\tau = |\Delta u_1(\mathbf{x}, t)|/|q_1(\mathbf{x}, t)|$ .

**Метод решения задачи.** Известно [2–4], что решение рассматриваемой задачи может быть сведено к решению с учетом ограничений (1) и (2) следующей системы граничных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} p_{j,\cos}^k(\mathbf{x}) - ip_{j,\sin}^k(\mathbf{x}) &= - \sum_{q=1}^3 \int_{\Omega} (F_{jq}^{\text{Re}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) + iF_{jq}^{\text{Im}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)) \times \\ &\times (\Delta u_{q,\cos}^k(\mathbf{y}) - i\Delta u_{q,\sin}^k(\mathbf{y})) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad k = \overline{0, +\infty}, \quad j = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (3)$$

для коэффициентов Фурье векторов нагрузки и разрыва перемещений берегов трещины

$$\begin{aligned} p_{j,\cos}^k(\mathbf{x}) &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p_j(\mathbf{x}, t) \cos(\omega_k t) dt, & p_{j,\sin}^k(\mathbf{x}) &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p_j(\mathbf{x}, t) \sin(\omega_k t) dt, \\ \Delta u_{j,\cos}^k(\mathbf{x}) &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^T \Delta u_j(\mathbf{x}, t) \cos(\omega_k t) dt, & \Delta u_{j,\sin}^k(\mathbf{x}) &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^T \Delta u_j(\mathbf{x}, t) \sin(\omega_k t) dt, \end{aligned}$$

а физические значения компонент векторов нагрузки и разрыва перемещений представлены тригонометрическими рядами Фурье

$$\begin{aligned} p_j(\mathbf{x}, t) &= \frac{p_{j,\cos}^0(\mathbf{x})}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (p_{j,\cos}^k(\mathbf{x}) \cos(\omega_k t) + p_{j,\sin}^k(\mathbf{x}) \sin(\omega_k t)), \\ \Delta u_j(\mathbf{x}, t) &= \frac{\Delta u_{j,\cos}^0(\mathbf{x})}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\Delta u_{j,\cos}^k(\mathbf{x}) \cos(\omega_k t) + \Delta u_{j,\sin}^k(\mathbf{x}) \sin(\omega_k t)), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\omega_k = 2\pi k/T$ .

Комплексные ядра граничных интегральных уравнений  $F_{jq}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ , действительная и мнимая части которых входят в систему граничных интегральных уравнений (3), могут быть получены из тензора фундаментальных перемещений Грина и в рассматриваемом случае определяются выражениями, приведенными в работах [3, 4].

Для численного решения задачи аппроксимируем поверхность трещины множеством плоских многоугольных элементов  $\Omega_m^h$ ,  $m = \overline{1, N}$ , на каждом из которых распределение векторов нагрузки и разрыва перемещений берегов трещины будем предполагать постоянным. Тогда из системы граничных интегральных уравнений (3) получим

$$\begin{aligned}
 p_{1,\cos}^k(\mathbf{x}_m) &= \sum_{j=1}^2 \left\{ - \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l^h} F_{1j}^{\text{Re}}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} \Delta u_{j,\cos}^k(\mathbf{y}_l) - \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l^h} F_{1j}^{\text{Im}}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} \Delta u_{j,\sin}^k(\mathbf{y}_l) \right\}, \\
 p_{1,\sin}^k(\mathbf{x}_m) &= \sum_{j=1}^2 \left\{ \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l^h} F_{1j}^{\text{Im}}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} \Delta u_{j,\cos}^k(\mathbf{y}_l) - \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l^h} F_{1j}^{\text{Re}}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} \Delta u_{j,\sin}^k(\mathbf{y}_l) \right\}, \\
 p_{2,\cos}^k(\mathbf{x}_m) &= \sum_{j=1}^2 \left\{ - \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l^h} F_{2j}^{\text{Re}}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} \Delta u_{j,\cos}^k(\mathbf{y}_l) - \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l^h} F_{2j}^{\text{Im}}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} \Delta u_{j,\sin}^k(\mathbf{y}_l) \right\}, \\
 p_{2,\sin}^k(\mathbf{x}_m) &= \sum_{j=1}^2 \left\{ \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l^h} F_{2j}^{\text{Im}}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} \Delta u_{j,\cos}^k(\mathbf{y}_l) - \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l^h} F_{2j}^{\text{Re}}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} \Delta u_{j,\sin}^k(\mathbf{y}_l) \right\}, \\
 p_{3,\cos}^k(\mathbf{x}_m) &= - \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l^h} F_{33}^{\text{Re}}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} \Delta u_{3,\cos}^k(\mathbf{y}_l) - \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l^h} F_{33}^{\text{Im}}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} \Delta u_{3,\sin}^k(\mathbf{y}_l), \\
 p_{3,\sin}^k(\mathbf{x}_m) &= \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l^h} F_{33}^{\text{Im}}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} \Delta u_{3,\cos}^k(\mathbf{y}_l) - \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l^h} F_{33}^{\text{Re}}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} \Delta u_{3,\sin}^k(\mathbf{y}_l),
 \end{aligned} \tag{5}$$

где  $m = \overline{1, N}$ ,  $k = \overline{0, +\infty}$ , а точки  $\mathbf{x}_m$  и  $\mathbf{y}_l$  расположены в геометрическом центре элементов  $\Omega_m^h$  и  $\Omega_l^h$ , соответственно.

Ввиду наличия в интегральных ядрах неинтегрируемых особенностей, порядок которых превышает размерность области интегрирования, интегралы, присутствующие в системе линейных алгебраических уравнений (5), должны рассматриваться в смысле конечной части расходящегося интеграла по Адамару. Для регуляризации подобных расходящихся интегралов был применен подход [2, 5], основанный на применении второй интегральной формулы Остроградского–Грина для оператора Лапласа, позволяющей связать интегралы по поверхности с интегралами по контуру этой поверхности. Интегралы, полученные после регуляризации, представляют собой криволинейные интегралы первого типа без особенностей. Преимуществом данного подхода является его применимость для регуляризации интегралов с различными особенностями, что дает возможность использовать его при интегрировании всех расходящихся составляющих интегральных ядер  $F_{jq}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ , упрощая численное вычисление элементов системы линейных интегральных уравнений (5).

Для решения задачи был применен следующий итерационный алгоритм [2, 6]:

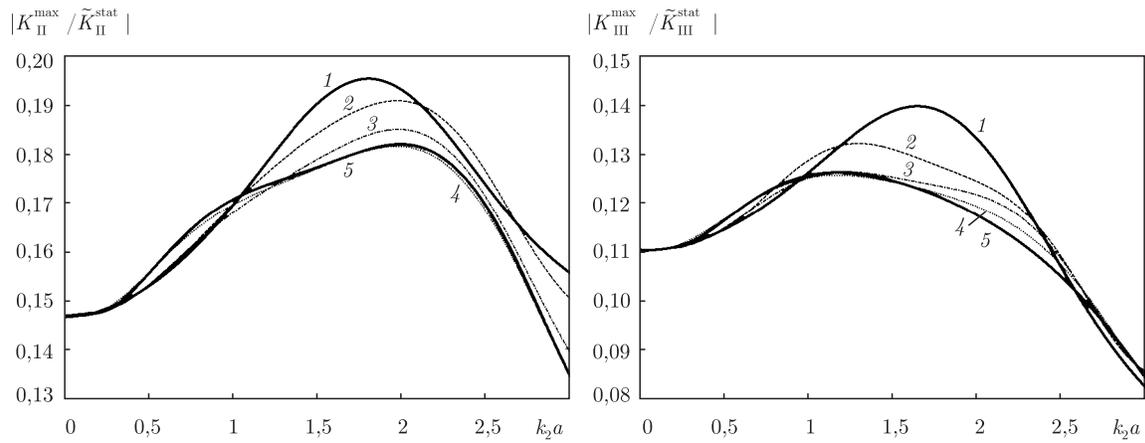


Рис. 1. КИН сдвига в зависимости от приведенного волнового числа  $k_2a$  при различных значениях коэффициента трения  $k_\tau$ : 1 —  $k_\tau = 0$ ; 2 —  $k_\tau = 0,05$ ; 3 —  $k_\tau = 0,1$ ; 4 —  $k_\tau = 0,4$ ; 5 —  $k_\tau = 1,0$

- 1) задается начальное распределение вектора нагрузки на поверхности трещины;
- 2) задача решается без учета ограничений (1), (2);
- 3) полученное решение корректируется с учетом ограничений (1), (2);
- 4) в случае, если требуемая точность не достигнута, совершается переход к следующему итерационному шагу.

Добавим, что из вида системы линейных алгебраических уравнений (5) следует, что в рассматриваемом случае нормальные и касательные компоненты решения задачи связаны только ограничениями (2), ограничивающими сверху величину модуля касательной компоненты сил контактного взаимодействия берегов в зависимости от величин коэффициента трения и нормальной компоненты контактных сил. Поэтому становится возможным вначале определить нормальные компоненты решения, которые далее используются при корректировке касательных компонент.

**Анализ полученных численных результатов.** В настоящей работе численное решение задачи получено для случая падения гармонической волны растяжения — сжатия под углом  $\alpha = 80^\circ$  на плоскую круговую трещину радиусом  $a$ , расположенную в материале со следующими механическими характеристиками: модуль Юнга  $E = 200$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,25$ , плотность материала  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>.

Полученные значения вектора разрыва перемещений в окрестности фронта трещины используются для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) нормального отрыва, поперечного и продольного сдвига. Точность численного решения зависит от пространственной и временной аппроксимации, а также числа коэффициентов Фурье, удерживаемых при вычислении рядов (4).

Отметим, что в отличие от осесимметричной задачи о нормальном падении волны на круговую трещину, в рассматриваемом случае косо направленного нагружения значения КИН в каждый момент времени зависят от расположения точки, в которой они вычисляются, на фронте трещины [3]. Работа [4] посвящена анализу распределения КИН нормального отрыва при различных углах падения волны, поэтому в настоящей работе остановимся на распределении КИН сдвига.

Результаты решения задачи при различных значениях приведенного волнового числа  $k_2a = a\omega\sqrt{\rho/\mu}$  и коэффициента трения  $k_\tau$  представлены на рисунках 1 и 2, содержащих

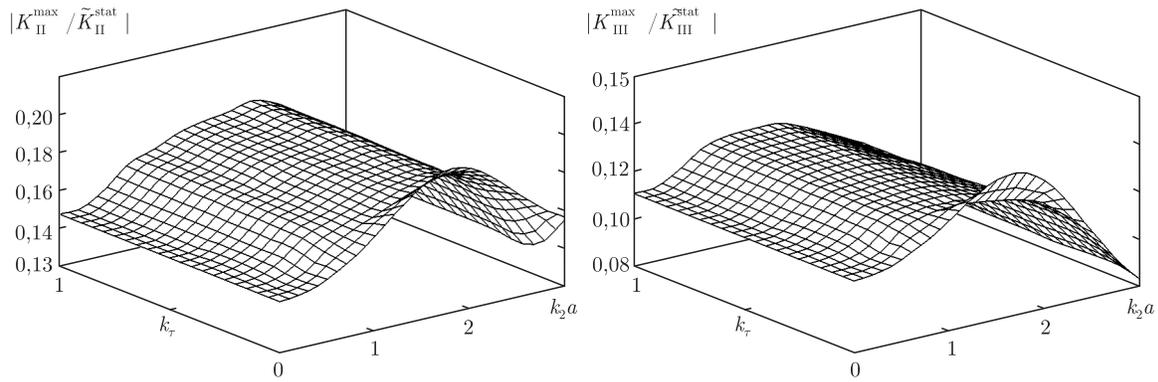


Рис. 2. КИН сдвига в зависимости от приведенного волнового числа  $k_2a$  и коэффициента трения  $k_\tau$

графики безразмерных КИН сдвига  $|K_{II,III}^{\max} / \tilde{K}_{II,III}^{\text{stat}}|$ , где  $K_{II,III}^{\max} = \max_{\mathbf{x},t} K_{II,III}(\mathbf{x}, t)$ , а  $\tilde{K}_{II,III}^{\text{stat}}$  — нормирующие статические величины, вычисленные согласно [1]:

$$\tilde{K}_{II}^{\text{stat}} = \frac{4\sigma}{2-\nu} \sqrt{\frac{a}{\pi}}, \quad \tilde{K}_{III}^{\text{stat}} = \frac{4(1-\nu)\sigma}{2-\nu} \sqrt{\frac{a}{\pi}}.$$

Анализ приведенных результатов показывает, что при учете трения изменяются как величины абсолютных максимумов КИН, так и значения волновых чисел, при которых эти максимумы достигаются. Видно, что с ростом коэффициента трения величины абсолютных максимумов КИН поперечного и продольного сдвига существенно уменьшаются. При этом в определенном диапазоне частот нагружения значения КИН, полученные с учетом трения (рис. 1, кривые 2–5), могут превосходить соответствующие значения, полученные без учета трения (кривые 1).

Видно, что после достижения коэффициентом трения некоторой зависящей от частоты нагружения критической величины распределение КИН сдвига практически не изменяется при дальнейшем увеличении коэффициента трения.

На основании результатов настоящей работы в дальнейшем представляется возможным определить во всем диапазоне частот нагружения верхнюю и нижнюю границу изменения КИН поперечного и продольного сдвига, причем эти границы будут действительны для любых величин коэффициента трения. Указанная оценка может иметь существенное значение для динамической механики разрушения тел с трещинами ввиду неизвестности реальной величины коэффициента трения на берегах трещин, образовавшихся в материале во время его создания и дальнейшей эксплуатации. Кроме того, одним из направлений дальнейших исследований является изучение влияния трения на решение задачи для трещин с начальным открытием и межслоевых трещин [7], появление которых может быть обусловлено потерей устойчивости материала при сжатии [8].

1. Zhang Ch., Gross D. On wave propagation in elastic solids with cracks. – Southampton, Boston: Computational Mechanics Publications, 1998. – 251 p.
2. Гузь А. Н., Зозуля В. В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках.: Неклассические проблемы механики разрушения. В 4 т. / Под ред. А. Н. Гузя. – Т. 4, кн. 2. – Киев, 1993. – 236 с.
3. Меньшиков А. В. Коэффициенты интенсивности напряжений для круговой трещины при гармоническом нагружении и учете контакта берегов // Пробл. машиностроения. – 2006. – 9, № 2. – С. 46–50.
4. Меньшиков А. В. Контактное взаимодействие берегов круговой трещины при косоугловом гармоническом нагружении // Доп. НАН України. – 2006. – № 7. – С. 47–51.

5. *Zozulya V. V., Gonzalez-Chi P. I.* Weakly singular, singular and hypersingular integrals in elasticity and fracture mechanics // J. of the Chinese Institute of Engin. – 1999. – **22**, No 6. – P. 763–775.
6. *Mistakidis E. S., Stavroulakis G. E.* Nonconvex optimization in mechanics. Algorithms, heuristics and engineering applications by FEM. – Dordrecht: Kluwer, 1998. – 300 p.
7. *Меньшиков В. А., Меньшиков А. В.* Гранично-контактные интегральные уравнения динамической задачи теории упругости о трещине на поверхности раздела полупространств // Доп. НАН України. – 2006. – № 6. – С. 51–56.
8. *Guz I. A.* The effect of the multi-axiality of compressive loading on the accuracy of a continuum model for layered materials // Intern. J. of Sol. and Struct. – 2005. – **42**, No 2. – P. 439–453.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев  
Центр микро- и наномеханики (CEMINACS)  
Абердинского университета, Шотландия*

*Поступило в редакцию 20.06.2006*