

А.В. Меньшиков, В.А. Меньшиков

## Контактное взаимодействие берегов стационарной плоской трещины с начальным раскрытием

(Представлено академиком НАН Украины А.Н. Гузем)

В работах [1-7] было показано, что контактное взаимодействие берегов трещины под воздействием динамического нагружения оказывает существенное влияние на решение задачи. Однако, упомянутые результаты были получены в предположении об отсутствии начального раскрытия берегов трещины. Исключением является работа [2], посвященная решению двумерной задачи о нормальном гармоническом нагружении прямолинейной трещины конечной длины с начальным раскрытием берегов.

В настоящей работе рассмотрена задача о контактном взаимодействии берегов круговой стационарной трещины с отличным от нуля начальным раскрытием берегов под воздействием нормальной гармонической волны растяжения-сжатия, падающей извне. Проведено исследование влияния формы и величины начального раскрытия трещины на решение задачи. Показано, что в окрестности фронта трещины контактное взаимодействие ее противоположных берегов имеет место даже при сравнительно значительном начальном раскрытии трещины.

**Постановка задачи.** Пусть в трехмерном линейно упругом, однородном и изотропном пространстве имеется стационарная плоская круговая трещина с серединной поверхностью  $\Omega = \{x_1^2 + x_2^2 \leq a^2, x_3 = 0\}$ , где  $a$  - радиус трещины.

В настоящей работе рассмотрены трещины с начальным раскрытием, имеющим следующий вид

$$h_0(\mathbf{x}) = b\Delta u^{stat,max} a(1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}/a), \quad (1)$$

и

$$h_0(\mathbf{x}) = b\Delta u^{stat,max} a(1 - \cos(\pi\sqrt{x_1^2 + x_2^2}/a))/2, \quad (2)$$

где  $b$  - коэффициент пропорциональности, а  $\Delta u^{stat,max} = 2(1 - \nu)/\mu$  - максимальная амплитуда раскрытия берегов трещины при статическом нагружении.

Схемы форм начального раскрытия берегов трещины, рассматривавшихся в настоящей работе, приведены на рисунке 1. Задача для трещины с начальным раскрытием берегов, аналогичным заданному соотношению (1) и представленному на рисунке 1а (в дальнейшем - трещина с начальным раскрытием 1-го типа), была рассмотрена в работе [2]. Форма начального раскрытия, соответствующая соотношению (2) и представленная на рисунке 1б (далее - трещина с начальным раскрытием 2-го типа), представляется более физической в случае отсутствия расклинивающих нагрузок. Плавное смыкание берегов вблизи фронта соответствует теории трещин как в однородном так и в неоднородном теле (композитном материале).

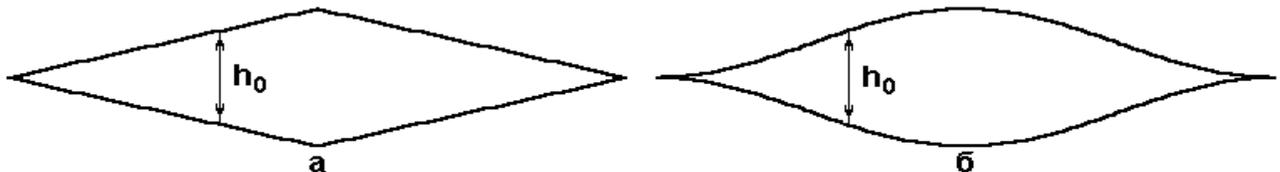


Рис 1. Диаметральное сечение трещины с раскрытием:  
а - раскрытие 1-го типа, б - раскрытие 2-го типа

Берега трещины свободны от внешних нагрузок. На трещину падает гармоническая волна растяжения-сжатия, которая описывается скалярной функцией  $\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0 e^{i(k_1 x_3 - \omega t)}$ , где  $\omega$  и  $\Phi_0$  - частота и амплитуда нагружения, соответственно;  $k_1 = \omega/c_1$  - обобщенное волновое число;  $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  - скорость распространения в материале продольных волн;  $\lambda$  и  $\mu$  - упругие постоянные Ламе;  $\rho$  - плотность материала.

При деформации материала под воздействием падающей волны противоположные берега трещины контактируют между собой, причем площадь и форма области контактного взаимодействия берегов  $\Omega_{cont}(t)$  неизвестны заранее и должны быть определены непосредственно при решении задачи. В течение периода колебаний на поверхности трещины возникают силы контактного взаимодействия  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ . Взаимные перемещения берегов трещины характеризуются вектором разрыва перемещений  $\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ .

Отметим, что в рассматриваемой задаче отличны от нуля лишь нормальные составляющие упомянутых векторов, для которых должны выполняться следующие односторонние ограничения [1, 3, 8]:

$$\Delta u_3(\mathbf{x}, t) \geq -h_0(\mathbf{x}), \quad q_3(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad (\Delta u_3(\mathbf{x}, t) + h_0(\mathbf{x}))q_3(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathcal{T}, \quad (3)$$

где  $\mathcal{T} := [0; T]$ , а  $T = 2\pi/\omega$  - период колебаний.

**Метод решения задачи.** Нагрузка на берегах трещины  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$  складывается из сил контактного взаимодействия и нагрузки  $\mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t)$ , являющейся результатом действия падающей волны [3-6]:

$$\mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t) = \left( 0, 0, -k_1^2 \Phi_0 \cos(\omega t) \right), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathcal{T} := [0; T].$$

Как было отмечено ранее [1, 3], контактное взаимодействие берегов трещины приводит к тому, что решение задачи является периодическим, но не гармоническим. Поэтому представим нормальные компоненты векторов нагрузки и разрыва перемещений тригонометрическими рядами Фурье

$$p_3(\mathbf{x}, t) = \frac{p_{3,cos}^0(\mathbf{x})}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( p_{3,cos}^k(\mathbf{x}) \cos(\omega_k t) + p_{3,sin}^k(\mathbf{x}) \sin(\omega_k t) \right),$$

$$\Delta u_3(\mathbf{x}, t) = \frac{\Delta u_{3,cos}^0(\mathbf{x})}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \Delta u_{3,cos}^k(\mathbf{x}) \cos(\omega_k t) + \Delta u_{3,sin}^k(\mathbf{x}) \sin(\omega_k t) \right),$$

где  $\omega_k = 2\pi k/T$ , а коэффициенты Фурье имеют вид:

$$p_{3,cos}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p_3(\mathbf{x}, t) \cos(\omega_k t) dt, \quad p_{3,sin}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p_3(\mathbf{x}, t) \sin(\omega_k t) dt,$$

$$\Delta u_{3,cos}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T \Delta u_3(\mathbf{x}, t) \cos(\omega_k t) dt, \quad \Delta u_{3,sin}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T \Delta u_3(\mathbf{x}, t) \sin(\omega_k t) dt.$$

Коэффициенты Фурье связаны следующей системой граничных интегральных уравнений [3-5]

$$p_{3,cos}^k(\mathbf{x}) - i p_{3,sin}^k(\mathbf{x}) =$$

$$= - \int_{\Omega} \left( F_{33}^{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) + i F_{33}^{Im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) \right) \left( \Delta u_{3,cos}^k(\mathbf{y}) - i \Delta u_{3,sin}^k(\mathbf{y}) \right) d\mathbf{y}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $k = \overline{0, +\infty}$ .

Интегральные ядра  $F_{33}^{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$  и  $F_{33}^{Im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$  представляют собой действительную и мнимую составляющие фундаментального решения динамической теории упругости

$$F_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2\pi(\lambda + 2\mu)} r^{-3} + \frac{\omega_k^2}{8\pi\mu} \left( \frac{\mu^2}{c_2^2} + \left( 2\lambda^2 + 4\lambda\mu + 3\mu^2 \right) \frac{c_2^2}{c_1^4} \right) r^{-1} -$$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-i\omega_k)^n (n-1)}{4\pi\mu n!(n+2)} \left( \frac{4\mu^2(n-1)}{c_2^n} + \left[ \lambda^2 n(n+2) + 4\lambda\mu(n+2) + 12\mu^2 \right] \frac{c_2^2}{c_1^{2+n}} \right) r^{n-3},$$

где  $r$  - расстояние между точками наблюдения и нагружения, а  $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$  - скорость распространения в материале поперечных волн.

Как было указано в работах [3-6, 9], в интегральном ядре  $F_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$  содержатся неинтегрируемые компоненты, в том числе и гиперсингулярные. Там же приведены выражения, позволяющие провести их численное интегрирование.

При решении задачи был использован итерационный алгоритм решения динамических задач механики разрушения тел с трещинами при учете контактного взаимодействия противоположных берегов трещин [1, 3, 5].

**Примеры численного решения задачи.** В качестве численного примера рассмотрена трещина в материале, обладающем следующими механическими свойствами: модуль упругости  $E = 200$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.25$ , плотность  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>.

На рисунках 2 и 3 приведено распределение нормальной составляющей вектора контактных сил взаимодействия на диаметральной сечении трещины  $S = \{-a \leq x_1 \leq a, x_2 = 0, x_3 = 0\}$  на протяжении периода колебаний при фиксированном значении приведенного волнового числа  $k_2 a = 2.0$  и различных значениях коэффициента пропорциональности  $b$ . Анализ результатов показывает, что противоположные берега трещины всегда контактируют в областях, прилегающих к фронту трещины, в то время как центральная часть трещины может оставаться раскрытой в течение всего периода колебаний. Площадь области контактного взаимодействия берегов уменьшается с увеличением начального раскрытия, однако, контактное взаимодействие берегов имеет место даже при значительном начальном раскрытии трещины.

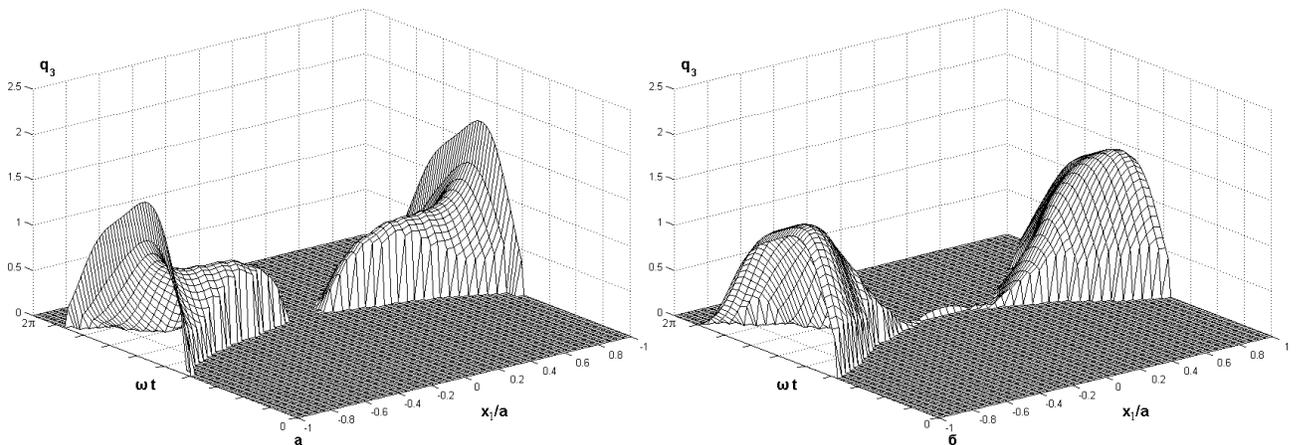


Рис. 2. Контактные силы взаимодействия,  $b = 1.0$ :

а - трещина с раскрытием 1-го типа, б - трещина с раскрытием 2-го типа

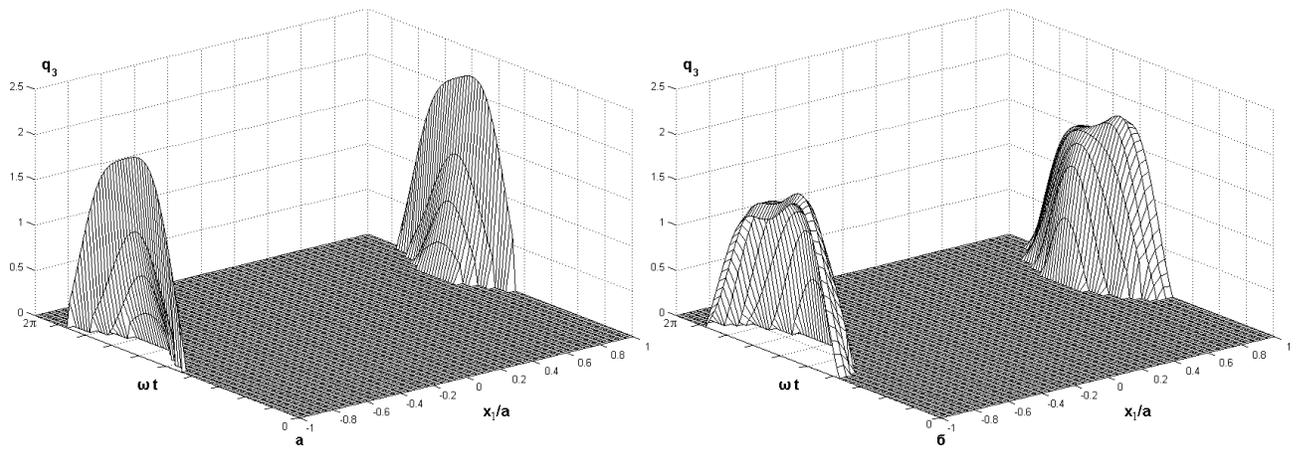


Рис. 3. Контактные силы взаимодействия,  $b = 2.0$ :  
 а - трещина с раскрытием 1-го типа, б - трещина с раскрытием 2-го типа

На наш взгляд, существенным является тот факт, что характер распределения контактных сил взаимодействия непосредственно вблизи фронта трещины принципиально отличается для двух различных типов начального раскрытия. Видно, что для трещины с начальным раскрытием 2-го типа величина контактных сил взаимодействия вблизи фронта трещины стабилизируется и изменяется незначительно, в то время как для трещины с 1-м типом раскрытия, в этой области наблюдается резкий рост контактных сил с увеличивающимся по мере приближения к фронту градиентом.

О влиянии контактного взаимодействия берегов трещины на распределение вектора разрыва перемещений в окрестности фронта трещины можно судить по рисунку 4, на котором приведены результаты вычисления относительной разницы между решениями, полученными с учетом и без учета контактного взаимодействия берегов

$$\Delta u_{norm}(\mathbf{x}) := \frac{\max_{t \in \mathcal{T}} \Delta u(\mathbf{x}, t) - \max_{t \in \mathcal{T}} \Delta u^{cont}(\mathbf{x}, t)}{\max_{t \in \mathcal{T}} \Delta u^{cont}(\mathbf{x}, t)},$$

при различных значениях приведенного волнового числа.

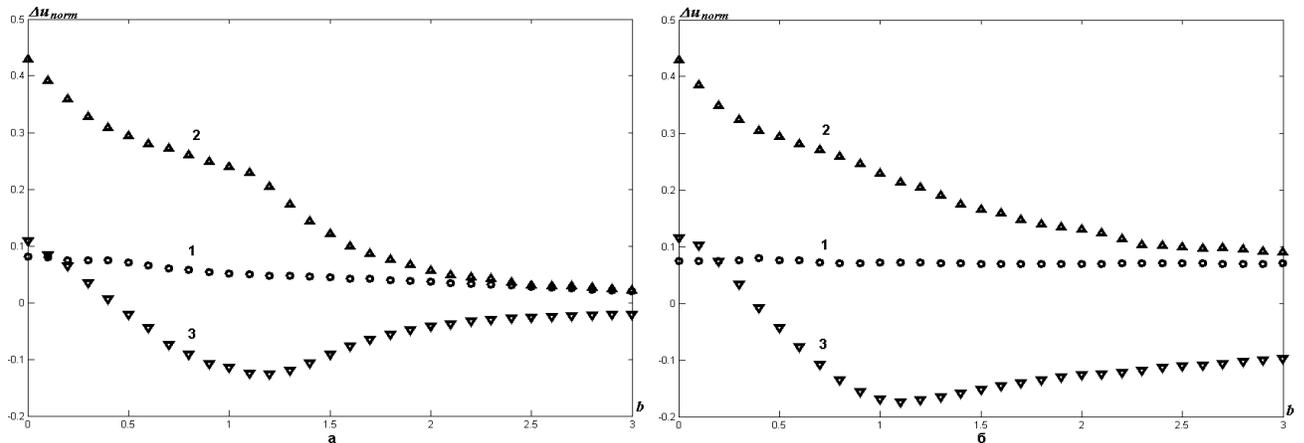


Рис. 4. Различие между решениями, полученными с учетом и без учета контактного взаимодействия в окрестности фронта трещины: а - трещина с раскрытием 1-го типа, б - трещина с раскрытием 2-го типа; 1 -  $k_2 a = 1.0$ ; 2 -  $k_2 a = 1.5$ ; 3 -  $k_2 a = 2.0$

Видно, что даже при сравнительно значительном начальном раскрытии трещины контактное взаимодействие берегов оказывает существенное влияние на величину разрыва

перемещений, а значит и на величину коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва в окрестности фронта трещины. Причем, если для трещины с начальным раскрытием 1-го типа  $\Delta u_{norm}(\mathbf{x})$  стремится к нулю при увеличении раскрытия трещины, то для трещины с раскрытием 2-го типа в исследованном диапазоне изменения коэффициента пропорциональности имеет место существенная разница между решениями с учетом и без учета контакта берегов.

**Выводы.** Результаты, представленные в настоящей работе, наглядно доказывают необходимость учета контактного взаимодействия противоположных берегов трещины.

*Авторы благодарны И.А. Гузю за внимание к настоящей работе и участие в анализе полученных результатов. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Королевского научного общества (Royal Society, U.K.).*

## Список литературы

- [1] *Гузь А.Н., Зозуля В.В.* Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках.: Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т. / Под ред. А.Н. Гузя. - Т. 4, кн. 2. - К.:Наукова думка, 1993. - 236 с.
- [2] *Зозуля В.В., Меньшиков В.А.* Контактное взаимодействие берегов трещины в плоскости при гармоническом нагружении // Прикладная механика. - 1994. - **30**, No 12. - С. 75-79.
- [3] *Guz A.N., Zozulya V.V.* Elastodynamic unilateral contact problems with friction for bodies with cracks, // International Applied Mechanics. - 2002. - **38**, No 8. - P. 895-932.
- [4] *Guz A.N., Zozulya V.V., Men'shikov A.V.* Three-dimensional contact problem for an elliptic crack interacting with a normally incident harmonic compression-expansion wave // Intern. Applied Mechanics. - 2003. - **39**, No 12. - P. 1425-1428.
- [5] *Zozulya V.V., Menshykov O.V.* Use of the constrained optimization algorithms in some problems of fracture mechanics // Optimization and Engineering. - 2003. - **4**, No 4. - P. 365-384.
- [6] *Меньшиков А.В.* Учет контакта берегов стационарной круговой трещины при гармоническом нагружении // Доп. НАН України. - 2004. - № 8. - С. 43-47.
- [7] *Guz A.N., Zozulya V.V., Men'shikov A.V.* General spatial dynamic problem for an elliptic crack under the action of a normal shear wave, with consideration for the contact interaction of the crack faces // Intern. Applied Mechanics. - 2004. - **40**, No 2. - P. 156-159.
- [8] *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. - М.: Мир, 1989. - 510 с.
- [9] *Zozulya V.V., Gonzalez-Chi P.I.* Weakly singular, singular and hypersingular integrals in elasticity and fracture mechanics // Journal of the Chinese Institute of Engineers. - 1999. - **22**, No 6. - P. 763-775.

University of Aberdeen, Aberdeen, Scotland, U.K.

Институт механики им. С.П. Тимошенко, Киев, Украина

Адрес для корреспонденции:

Василий Александрович Меньшиков, ул.Матросова 8, кв.8, 61124 Харьков, Украина  
тел. 8 050 323-38-95

O.V. Menshykov, V.O. Menshykov  
Contact interaction of faces of the stationary plane crack with an initial opening

The paper is devoted to the solution of the 3-D fracture mechanics problem for linearly elastic, homogeneous and isotropic solid with the penny-shaped crack with an initial opening under normally incident harmonic tension-compression wave. The problem is solved with allowance for the crack faces contact interaction. The distribution of the contact forces is studied. The solution is compared with corresponding one obtained without allowance for the contact interaction for various values of the initial opening.

Контактное взаимодействие берегов стационарной плоской трещины с начальным раскрытием

Работа посвящена решению пространственной задачи механики разрушения для линейно упругого, однородного и изотропного пространства с круговой стационарной трещиной с некоторым начальным раскрытием под воздействием нормальной гармонической волны растяжения-сжатия. Задача решена с учетом контактного взаимодействия противоположных берегов трещин. Исследовано распределение контактных сил взаимодействия на поверхности трещины. Проведено сравнение решений, полученных с учетом и без учета контактного взаимодействия, при различном начальном открытии берегов.