

**А.В. Меньшиков**

## **Влияние контакта берегов эллиптической трещины на распределение коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва**

*(Представлено академиком НАН Украины А.Н. Гузем)*

**Вступление.** Контактное взаимодействие противоположных берегов трещин, существующих в любом современном конструкционном материале, оказывает значительное влияние на распределение компонент напряженно-деформированного состояния [1-6]. В настоящей работе рассмотрена пространственная задача механики разрушения для стационарной плоской эллиптической трещины при нормальном падении гармонической волны растяжения-сжатия с учетом контакта берегов трещины. Исследовано влияние контактного взаимодействия берегов на распределение коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва в окрестности фронта трещины в зависимости от геометрических параметров эллипса и при фиксированных значениях частоты нагружения.

**Постановка задачи.** Пусть в трехмерном линейно упругом, однородном и изотропном пространстве имеется стационарная эллиптическая трещина конечных размеров и без начального раскрытия. Поверхность трещины имеет следующий вид

$$\Omega = \{0 \leq x_1 \leq a \cos \beta, 0 \leq x_2 \leq b \sin \beta, a \geq b, 0 \leq \beta < 2\pi; x_3 = 0\}.$$

Перпендикулярно поверхности трещины с частотой  $\omega = 2\pi/T$  распространяется гармоническая волна растяжения-сжатия [2-6].

В процессе деформации тела противоположные берега трещины взаимодействуют между собой, а в изменяющейся во времени области контакта берегов трещины  $\Omega_e \subset \Omega$  возникают силы контактного взаимодействия  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ . Таким образом, нагрузка на берегах трещины  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$  определяется не только падающей волной, а зависит и от распределения вектора сил контактного взаимодействия [1, 2, 4].

Отметим, что контакт между берегами трещины предполагается односторонним (нормальная составляющая вектора контактных сил взаимодействия – неотрицательна), и не допускается взаимопроникновение берегов (нормальная компонента вектора разрыва перемещений  $\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , характеризующего взаимные перемещения берегов трещины, – неотрицательна). В рассмотренном случае касательные перемещения и напряжения отсутствуют, поэтому для решения задачи достаточно ограничиться определением нормальных составляющих компонент напряженно-деформированного состояния, для которых, учитывая приведенное выше, должны выполняться следующие односторонние ограничения в виде неравенств [1]

$$\Delta u_3(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad q_3(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad \Delta u_3(\mathbf{x}, t) q_3(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где  $\Delta u_3(\mathbf{x}, t)$  и  $q_3(\mathbf{x}, t)$  – нормальные составляющие векторов разрыва перемещений и контактных сил взаимодействия.

**Метод решения задачи.** Ввиду того, что область контакта берегов  $\Omega_e$  изменяется во времени и подлежит определению в ходе решения задачи, задача является нелинейной, а компоненты напряженно-деформированного состояния не могут быть представлены гармоническими функциями. Следуя предложенному в работах А.Н. Гузя и В.В. Зозули [1, 4] подходу, представим компоненты векторов нагрузки и разрыва перемещений рядами Фурье по параметру нагружения  $\omega$ .

Тогда коэффициенты Фурье нормальных составляющих векторов нагрузки и разрыва перемещений будут связаны между собой следующими системами граничных интегральных уравнений

$$p_3^k(\mathbf{x}) = -\int_{\Omega} F_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) \Delta u_3^k(\mathbf{y}) d\Omega, \quad \mathbf{y} \in \Omega, \quad k = \overline{-\infty, +\infty}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  - точки наблюдения и нагружения,  $\omega_k = 2\pi k/T$  и

$$p_3^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T p_3(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega_k t} dt, \quad \Delta u_3^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T \Delta u_3(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega_k t} dt,$$

а искомые нормальные составляющие векторов нагрузки и разрыва перемещений представляются рядами Фурье

$$p_3(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_3^k(\mathbf{x}) e^{i\omega_k t} \right\}, \quad \Delta u_3(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta u_3^k(\mathbf{x}) e^{i\omega_k t} \right\}.$$

Комплекснозначные интегральные ядра  $F_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ , входящие в системы граничных интегральных уравнений (2), представляют собой фундаментальные решения (функции Грина) динамической теории упругости и в рассматриваемом случае имеют следующий вид [3-7]

$$F_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2\pi(\lambda + 2\mu)} r^{-3} + \frac{\omega^2 k^2}{8\pi\mu} \left[ \frac{\mu^2}{c_2^2} + (2\lambda^2 + 4\lambda\mu + 3\mu^2) \frac{c_2^2}{c_1^4} \right] r^{-1} - \frac{1}{4\pi\mu} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-i\omega k)^n (n-1)}{n!(n+2)} \left[ \frac{4\mu^2(n-1)}{c_2^n} + (\lambda^2 n(n+2) + 4\lambda\mu(n+2) + 12\mu^2) \frac{c_2^2}{c_1^{n+2}} \right] r^{n-3}, \quad (3)$$

где  $r$  - расстояние между точками  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ ,  $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  и  $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$  - скорости распространения продольных и поперечных волн;  $\lambda$  и  $\mu$  - константы Ламе;  $\rho$  - плотность материала.

Содержащиеся в выражении (3) неинтегрируемые особенности  $r^{-3}$ , порядок которых превышает размерность области интегрирования, вынуждают рассматривать интегралы, входящие в системы граничных интегральных уравнений (2) в смысле конечной части по Адамару [8]. При численном решении задачи необходимо вычислить гиперсингулярные, слабосингулярные и регулярные интегралы по поверхности плоских многоугольных элементов, аппроксимирующих поверхность трещины (о регуляризации и вычислении различных интегралов, встречающихся при решении задач механики разрушения с учетом контактного взаимодействия берегов, см. [1, 8]).

Для решения поставленной задачи был применен основанный на вариационных принципах динамической теории упругости итерационный алгоритм, который можно

условно разделить на следующие части:

- 1) задается начальное распределение вектора нагрузки или вектора разрыва перемещений на поверхности трещины;
- 2) задача решается без учета ограничений (1);
- 3) полученное решение корректируется с учетом ограничений (1);
- 4) в случае, если требуемая точность не достигнута, совершается переход к следующему итерационному шагу.

Подробную информацию о свойствах подобных итерационных алгоритмов можно найти в работах [1, 4, 9, 10].

**Результаты численного решения задачи.** Рассмотрим трещину, расположенную в материале, обладающем следующими механическими свойствами: модуль упругости  $E = 200 \text{ ГПа}$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , плотность  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ .

Контактное взаимодействие противоположных берегов трещины оказывает значительное влияние на напряженно-деформированное состояние материала, что в свою очередь, приводит к существенному (по сравнению с результатами, полученными без учета контактного взаимодействия) изменению распределений коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности края трещины. Достаточно подробная информация о распределении коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва  $K_I(\mathbf{x}, t)$  для круговой и эллиптической трещин в зависимости от волнового числа приведена в работах [2, 4, 6]. Однако, упомянутые работы не содержат результатов исследования зависимости напряженно-деформированного состояния от геометрических параметров эллипса (отношение длин малой и большой осей), представляющего, по мнению автора, значительных интерес.

Таблица 1 и рисунки 1-3 содержат результаты вычисления максимального значения  $K_I(\mathbf{x}, t)$  в вершинах большой ( $\beta = 0$ ) и малой ( $\beta = \pi/2$ ) осей эллипса в статическом случае [11] и при различных значениях приведенного волнового числа  $k_2 a = \omega a / c_2$ .

Отметим, что результаты, полученные при решении задачи без учета контактного взаимодействия, совпадают с результатами других авторов [12].

**Таблица 1**  
**Зависимость коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва от отношения осей эллипса**

$b/a$	$K_I^{\max}$													
	статика		$k_2 a = 1,0$				$k_2 a = 2,0$				$k_2 a = 3,0$			
	без контакта		без контакта		с контактом		без контакта		с контактом		без контакта		с контактом	
	$\beta=0$	$\beta=\pi/2$	$\beta=0$	$\beta=\pi/2$	$\beta=0$	$\beta=\pi/2$	$\beta=0$	$\beta=\pi/2$	$\beta=0$	$\beta=\pi/2$	$\beta=0$	$\beta=\pi/2$	$\beta=0$	$\beta=\pi/2$
0,1	0,17	0,54	0,17	0,55	0,17	0,55	0,17	0,57	0,18	0,58	0,18	0,61	0,18	0,62
0,2	0,33	0,74	0,34	0,77	0,34	0,77	0,35	0,85	0,34	0,88	0,35	0,99	0,35	0,90
0,3	0,47	0,87	0,50	0,94	0,50	0,97	0,55	1,16	0,52	1,09	0,54	1,42	0,53	1,01
0,4	0,61	0,96	0,65	1,07	0,66	1,14	0,75	1,42	0,66	1,21	0,62	1,52	0,61	0,98
0,5	0,73	1,03	0,80	1,18	0,81	1,25	0,96	1,62	0,78	1,21	0,63	1,33	0,69	0,95
0,6	0,83	1,08	0,95	1,27	0,95	1,33	1,14	1,76	0,88	1,19	0,57	1,04	0,72	0,93
0,7	0,93	1,11	1,10	1,34	1,08	1,39	1,25	1,75	0,95	1,17	0,52	0,80	0,77	0,92
0,8	1,01	1,12	1,22	1,40	1,18	1,40	1,30	1,64	1,02	1,14	0,51	0,62	0,78	0,89
0,9	1,08	1,13	1,35	1,44	1,28	1,39	1,29	1,44	1,07	1,10	0,50	0,52	0,80	0,84
1,0	1,13	1,13	1,46	1,46	1,35	1,35	1,26	1,26	1,09	1,09	0,47	0,47	0,79	0,79

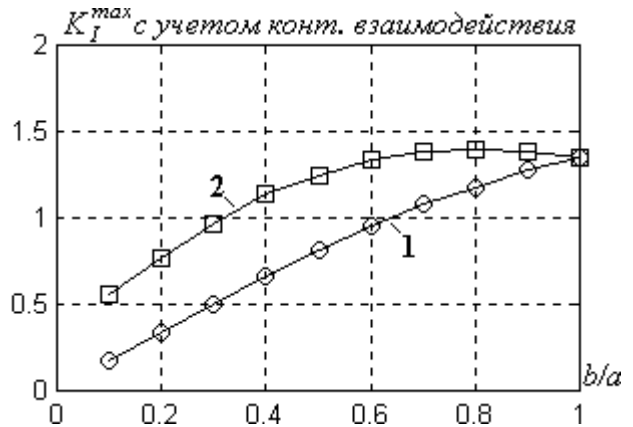
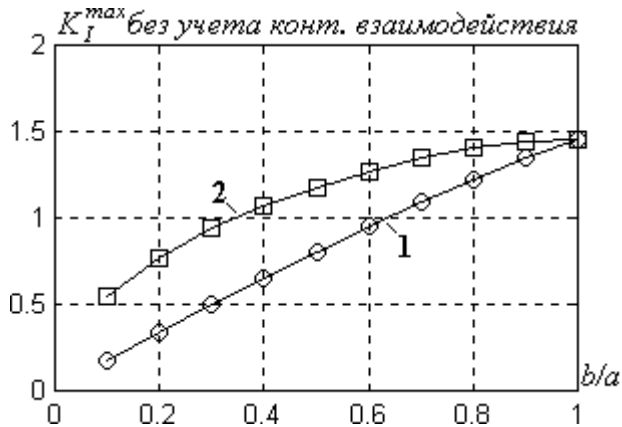


Рис. 1. Коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва при  $k_2 a = 1,0$ :  
1 -  $\beta = 0$ ; 2 -  $\beta = \pi/2$ .

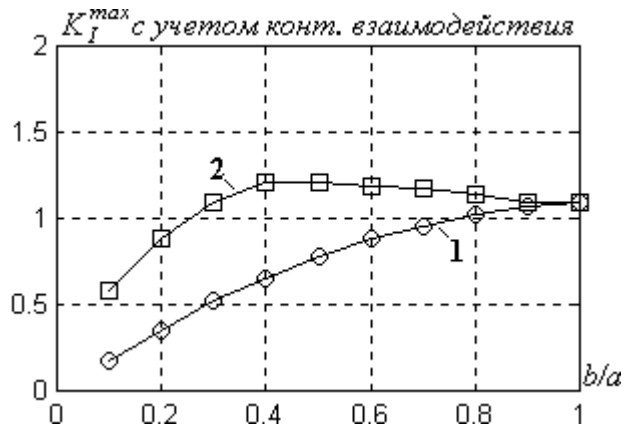
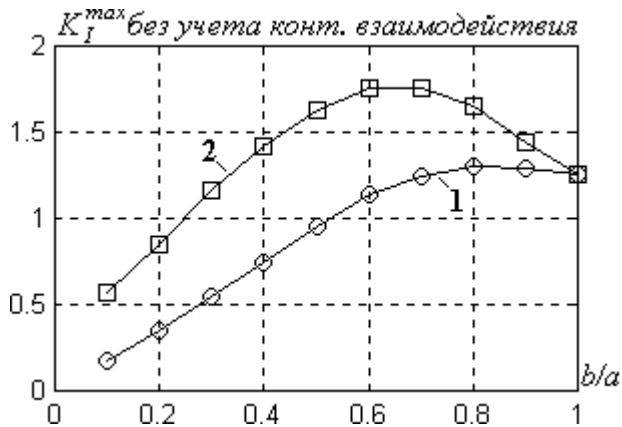


Рис. 2. Коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва при  $k_2 a = 2,0$ :  
1 -  $\beta = 0$ ; 2 -  $\beta = \pi/2$ .

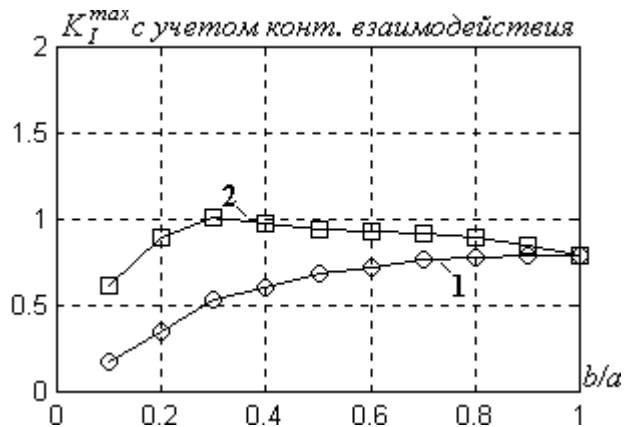
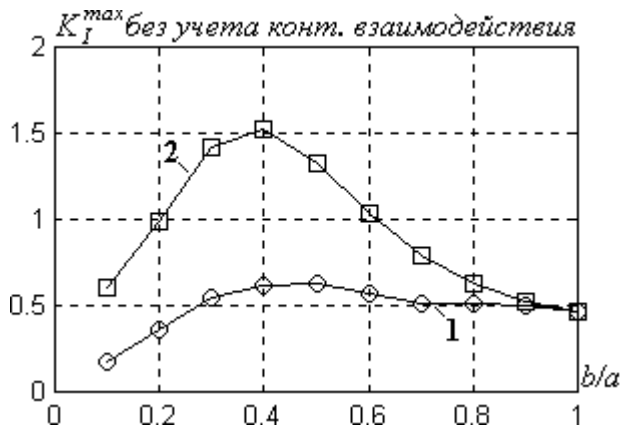


Рис. 3. Коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва при  $k_2 a = 3,0$ :  
1 -  $\beta = 0$ ; 2 -  $\beta = \pi/2$ .

**Выводы.** Учет контактного взаимодействия противоположных берегов трещины приводит к значительному изменению решения задачи. Изменяются не только величины достигаемых максимумов (разница между результатами, полученными с учетом и без учета

контакта берегов, может достигать 50%), но и свойства полученного решения (значение отношения  $b/a$ , при котором достигается максимум, а также кривизна кривых 1 и 2 на рис. 1-3). Таким образом, можно говорить как о количественном, так и о качественном влиянии контактного взаимодействия берегов трещины на напряженно-деформированное состояние в окрестности фронта трещины.

В заключение еще раз подчеркнем важность учета контактного взаимодействия при решении динамических задач механики разрушения тел с трещинами.

1. Гузь А.Н., Зозуля В.В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках.: Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т. под ред. А.Н. Гузя. Т. 4, книга 2, К., 1993. 236с.
2. Зозуля В.В., Меньшиков А.В. Контакт берегов плоской эллиптической трещины при нормальном падении гармонической волны растяжения-сжатия // Теоретическая и прикладная механика. – 2003, вып. 37, С. 168-172.
3. Меньшиков А.В. Исследование контактного взаимодействия берегов трещины в трехмерном пространстве для случая нормального падения волны растяжения-сжатия // Доповіді НАН України. - 2002. - № 6. - С. 52-55.
4. Guz A.N., Zozulya V.V. Elastodynamic unilateral contact problems with friction for bodies with cracks // International Applied Mechanics, 2002, Vol. 38, № 8, p. 895-932.
5. Zozulya V.V., Men'shikov A.V. Contact interaction of the faces of a rectangular crack under normally incident tension-compression wave // International Applied Mechanics, 2002, Vol. 38, № 3, p. 302-307.
6. Zozulya V.V., Men'shikov A.V. On one contact problem in fracture mechanics for a normally incident tension-compression wave // International Applied Mechanics, 2002, Vol. 38, № 7, p. 824-828.
7. Меньшиков В.А. Трехмерная контактная задача для упругого тела с трещиной при гармоническом нагружении // Доповіді НАН України. - 1995. - № 7. - С. 45-48.
8. Zozulya V.V., Gonzalez-Chi P.I. Weakly singular, singular and hypersingular integrals in elasticity and fracture mechanics // Journal of the Chinese Institute of Engineers, 1999, 22(6), p. 763-775.
9. Zozulya V.V. Variational principles and algorithms in contact problem with friction, in: Advances in Scientific Computing, Computational Intelligence and Applications. Eds. N. Mastrokakis, V. Mladenov, B. Suter, L.J. Wang, 2001, WSES Press, Danvers. p. 181-186.
10. Zozulya V.V., Men'shikova M.V. Study of iterative algorithms for solution of dynamic contact problems for elastic cracked bodies // International Applied Mechanics, 2002, Vol. 38, № 5, p. 573-577.
11. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М. 1974. 640с.
12. Zhang Ch., Gross D. On Wave Propagation in Elastic Solids with Cracks, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, Boston, USA, 1998.

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев*

Украина, 61124, г. Харьков, ул. Матросова 8, кв. 8., Меньшикову Александру Васильевичу  
Тел. (0572) 52-45-77