

А.В. Меньшиков

Исследование контактного взаимодействия берегов трещины в трехмерном пространстве для случая нормального падения волны растяжения-сжатия

Пренебрежение контактным взаимодействием берегов трещины под воздействием нестационарной нагрузки приводит к упрощенному описанию физических процессов и искажению получаемых механических характеристик [1-3]. В данной работе, используя предложенный в [1, 3] подход, рассматривается трехмерная динамическая задача для плоской трещины в пространстве с учетом контактного взаимодействия берегов трещины.

Пусть в трехмерном линейно упругом, однородном и изотропном пространстве имеется плоская стационарная трещина конечных размеров с поверхностью Ω и начальным раскрытием h_0 . Введем прямоугольную декартову систему координат, оси Ox_1 и Ox_2 которой лежат в плоскости трещины, а ось Ox_3 перпендикулярна ее плоскости.

Рассмотрим контактное взаимодействие берегов трещины в случае, когда гармоническая во времени волна растяжения-сжатия распространяется перпендикулярно поверхности трещины. Пусть падающая волна описывается потенциальной функцией

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0 e^{i(k_1 x_3 - \omega t)}$$

где $\omega = 2\pi/T$ - частота, T - период, Φ_0 - амплитуда падающей волны, i - мнимая единица, $k_1 = \omega/C_1$ - обобщенное волновое число, $C_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ - скорость распространения продольной волны; λ и μ - константы Ламэ; ρ - плотность материала.

Для нормальных составляющих векторов сил контактного взаимодействия $q_3(\mathbf{x}, t)$ и разрыва перемещений $\Delta u_3(\mathbf{x}, t)$, возникающих в области плотного контакта берегов трещины Ω_l , должны выполняться следующие односторонние ограничения в виде неравенств [1, 3]

$$\Delta u_3(\mathbf{x}, t) \geq -h_0, \quad q_3(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad (\Delta u_3(\mathbf{x}, t) + h_0)q_3(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

Тогда нагрузка на поверхности трещины имеет вид

$$p_3(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} p_3^*(\mathbf{x}, t) + q_3(\mathbf{x}, t), & \forall \mathbf{x} \in \Omega_l, \\ p_3^*(\mathbf{x}, t), & \forall \mathbf{x} \notin \Omega_l, \end{cases}$$

где $p_3^*(\mathbf{x}, t) = \text{Re}\{-k_1^2 \Phi_0 e^{i(k_1 x_3 - \omega t)}\}$ - нагрузка, являющаяся результатом действия падающей волны.

Так как размеры области Ω_l изменяются во времени, то учет контактного взаимодействия берегов делает задачу нелинейной [1, 3]. Поэтому компоненты напряженно-деформированного

состояния, вызванные отраженными волнами, не могут быть представлены в виде гармонических функций.

Представим нормальные составляющие векторов контактных сил взаимодействия и разрыва перемещений рядами Фурье по времени

$$p_3(\mathbf{x}, t) = \frac{p_{3,c}^0(\mathbf{x})}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (p_{3,c}^k(\mathbf{x}) \cos(\omega_k t) + p_{3,s}^k(\mathbf{x}) \sin(\omega_k t)), \quad (2)$$

$$\Delta u_3(\mathbf{x}, t) = \frac{\Delta u_{3,c}^0(\mathbf{x})}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta u_{3,c}^k(\mathbf{x}) \cos(\omega_k t) + \Delta u_{3,s}^k(\mathbf{x}) \sin(\omega_k t)). \quad (3)$$

где

$$p_{3,c}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p_3(\mathbf{x}, t) \cos(\omega_k t) dt, \quad p_{3,s}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p_3(\mathbf{x}, t) \sin(\omega_k t) dt, \quad (4)$$

$$\Delta u_{3,c}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T \Delta u_3(\mathbf{x}, t) \cos(\omega_k t) dt, \quad \Delta u_{3,s}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T \Delta u_3(\mathbf{x}, t) \sin(\omega_k t) dt. \quad (5)$$

Тогда для коэффициентов Фурье получим, согласно [1, 4], систему граничных интегральных уравнений вида

$$\begin{aligned} p_{3,c}^k(\mathbf{x}) &= - \int_{\Omega} F_{33}^{\text{Re}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) \Delta u_{3,c}^k(\mathbf{y}) d\Omega - \int_{\Omega} F_{33}^{\text{Im}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) \Delta u_{3,s}^k(\mathbf{y}) d\Omega, \\ p_{3,s}^k(\mathbf{x}) &= - \int_{\Omega} F_{33}^{\text{Re}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) \Delta u_{3,s}^k(\mathbf{y}) d\Omega + \int_{\Omega} F_{33}^{\text{Im}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) \Delta u_{3,c}^k(\mathbf{y}) d\Omega, \end{aligned} \quad (6)$$

где \mathbf{x} - точка наблюдения; \mathbf{y} - точка нагружения; $\omega_k = 2\pi k/T$; $F_{33}^{\text{Re}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ и $F_{33}^{\text{Im}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ представляют собой действительную и мнимую составляющие функции Грина динамической теории упругости $F_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$, для которой в рассматриваемом случае имеем следующее выражение [4]

$$\begin{aligned} F_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) &= \frac{1}{r^3} \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2\pi(\lambda + 2\mu)} - \frac{1}{r^3 4\pi\mu} \times \\ &\times \left\{ 4\mu^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-l_2)^n}{n!} \frac{(n-1)^2}{(n+2)} + \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda^2 n(n+2) + 4\lambda\mu(n+2) + 12\mu^2] \frac{(-l_1)^n}{n!} \frac{C_2^2}{C_1^2} \frac{(n-1)}{(n+2)} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

где $l_s = i\omega_k r / C_s$, $s = \overline{1,2}$; r - расстояние между \mathbf{x} и \mathbf{y} ; $C_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ - скорость распространения поперечной волны.

Из вида выражения (7) следует, что интегралы, присутствующие в (6), должны рассматриваться в смысле конечной части по Адамару. Выражения для $F_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$, регуляризованные с выделением конечной части расходящихся интегралов, приведены в [4, 5].

Таким образом, задача для отраженных волн сводится к определению контактных сил и раскрытия трещины, удовлетворяющих ограничениям (1). Для решения поставленной задачи

используем итерационный алгоритм решения контактных задач теории упругости с односторонними ограничениями, основанный на вариационных принципах теории упругости [6].

В качестве численного примера рассмотрим задачу о контактном взаимодействии берегов круговой трещины в трехмерном пространстве, поверхность которой описывается координатами $\Omega = \{x_1^2 + x_2^2 \leq l^2, x_3 = 0\}$, а начальное раскрытие равно нулю, под действием волны растяжения-сжатия, распространяющейся перпендикулярно плоскости трещины. Материал, в котором находится трещина, имеет следующие механические характеристики: модуль упругости $E = 200 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, удельная плотность $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$.

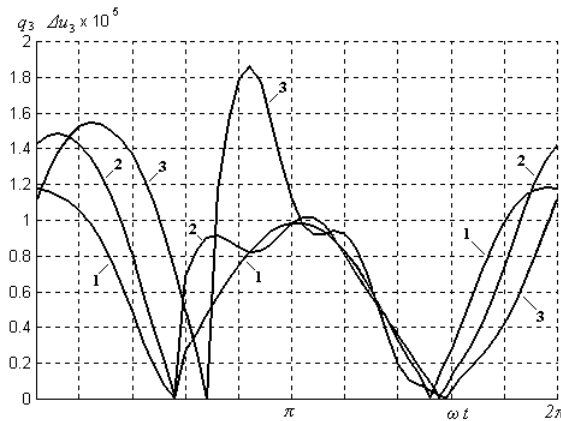


Рис. 1. Контактные силы взаимодействия и разрыв перемещений в точке $\{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0\}$: 1 - $k_1 = 0.18$, 2 - $k_1 = 0.45$, 3 - $k_1 = 0.72$

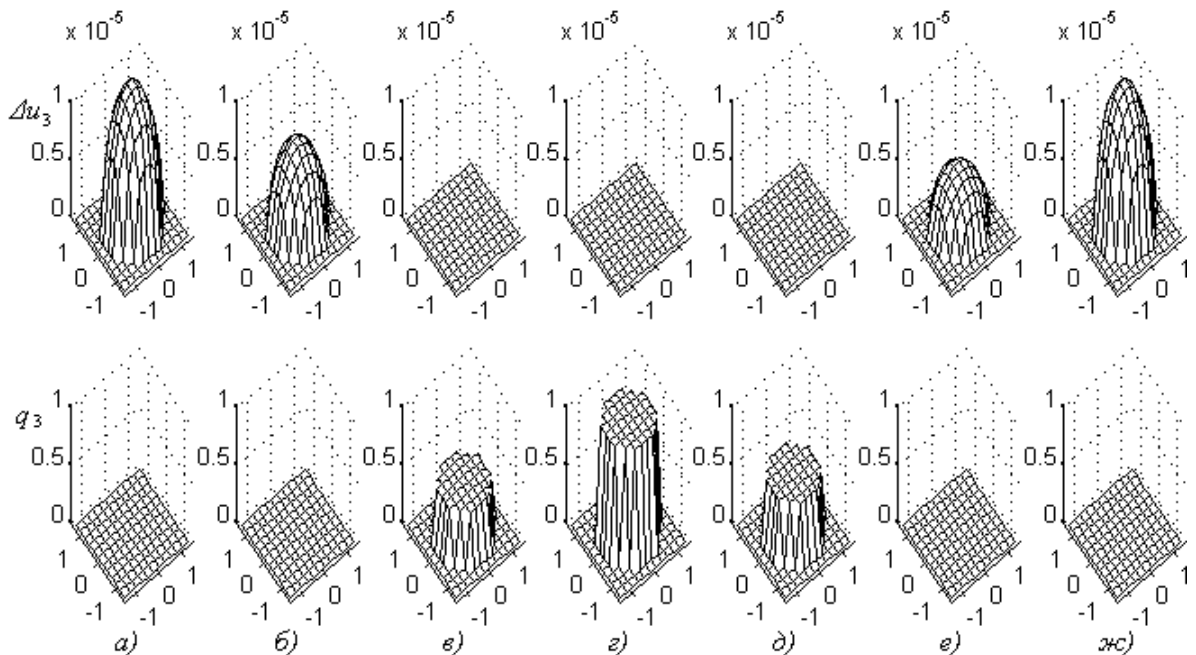


Рис. 2. Контактные силы и разрыв перемещений на поверхности трещины, $k_1 = 0.18$, а) $\omega t = 0$; б) $\omega t = \pi/3$; в) $\omega t = 2\pi/3$; г) $\omega t = \pi$; д) $\omega t = 4\pi/3$; е) $\omega t = 5\pi/3$; ж) $\omega t = 2\pi$.

О результатах решения задачи можно судить по иллюстрациям, на которых показано распределение во времени векторов контактных сил взаимодействия и разрыва перемещений в точке $\{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0\}$ (Рис.1) и на поверхности трещины (Рис. 2).

Отметим, что полученное решение удовлетворяет односторонним ограничениям (1) и является устойчивым относительно изменения числа удерживаемых коэффициентов Фурье и точности пространственной и временной аппроксимаций. При малых значениях волнового числа контактные силы распределены по поверхности трещины почти равномерно, а распределение разрыва перемещений имеет форму близкую к эллипсоидальной или равно нулю (Рис.2). С ростом волнового числа структура распределения контактных сил взаимодействия и разрыва перемещений значительно усложняется, гладкость распределения контактных сил нарушается как по поверхности трещины, так и во времени, при этом наблюдается сдвиг по фазе между возбуждающей нагрузкой и раскрытием трещины (Рис.1).

Сравнение полученных для различных типов трещин результатов с данными работ [1, 7], а также их количественный и качественный анализ свидетельствуют о том, что предложенный в данной работе подход может с успехом применяться при решении трехмерных динамических контактных задач для тел с трещинами.

1. *Гузь А.Н, Зозуля В.В.* Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках. – Киев, Наукова Думка, 1993.-236с.
2. *Guz A.N.* Description and study of some nonclassical problems of fracture mechanics and related mechanisms, *Int. Appl. Mechanics*, 2000, Vol. 36, № 12, pp.1537-1564.1
3. *Guz A.N., Zozulya V.V.* Fracture dynamics with allowance for a crack edges contact interaction, *Int. J. of Nonlin. Sci. and Num. Simulation*, 2001, Vol. 2, № 3, pp. 173-233.
4. *Зозуля В.В., Меньшиков А.В., Меньшикова М.В.* Применение граничных гиперсингулярных интегральных уравнений в механике разрушения, *Теоретическая и прикладная механика*, 2001, вып. 33, С. 57-63.
5. *Меньшиков В.А.* Гиперсингулярные интегралы в трехмерных задачах для тел с трещинами // *Доповіді НАН України.-1995.-№8.-С. 61-64.*
6. *Zozulya V.V.* Variational principles and algorithms in contact problem with friction, in: *Advances in Scientific Computing, Computational Intelligence and Applications*, 2001, WSES Press, Danvers, pp. 181-186.
7. *Партон В.З., Борисковский В.Г.* Динамика хрупкого разрушения. – М.: Машиностроение, 1988. – 240с.

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины
Украина, 61124, г. Харьков, ул. Матросова 8, кв. 8., Меньшикову Александру Васильевичу
Тел. (0572) 52-45-77