

А.В. Меньшиков

## Контактное взаимодействие берегов круговой трещины при косонаправленном гармоническом нагружении

(Представлено академиком НАН Украины А.Н. Гузем)

*The contact interaction of the opposite faces of a penny-shaped crack under oblique incidence of a harmonic tension-compression wave is considered. The problem is solved by the method of boundary integral equations. The distribution of the stress intensity factor (opening mode) is studied for different values of the wave number and different angles of the incidence of the wave. The results are compared with those obtained without allowance for the contact interaction.*

В работах [1-6] отмечено, что различие между решениями задач механики разрушения тела с трещинами при гармоническом нагружении, полученными с учетом и без учета контактного взаимодействия берегов трещин, может при определенных условиях достигать 50 процентов, что может сыграть существенную роль при оценке и расчетах прочности конструкций, подверженных динамическому нагружению.

Однако большинство упомянутых работ содержит результаты численного решения плоских и пространственных задач для трещин под воздействием гармонической волны растяжения-сжатия или сдвига, распространяющейся перпендикулярно поверхности трещины (нормальное нагружение). Исключением являются работы [2, 6], которые посвящены исследованию влияния контактного взаимодействия берегов трещины, находящейся под воздействием гармонической волны, направленной под произвольным углом к поверхности трещины (косонаправленное нагружение). Работа [2] содержит результаты решения задачи о контактном взаимодействии берегов прямолинейной трещины конечной длины при косонаправленном нагружении. В работе [6] приведен пример распределения векторов разрыва перемещений и контактных сил взаимодействия берегов плоской круговой трещины при фиксированных значениях коэффициента трения, частоты и угла распространения волны, но отсутствует какая-либо информация о распределении коэффициентов интенсивности напряжений при различных значениях параметров задачи. Таким образом остается открытым вопрос о зависимости решения пространственной задачи механики разрушения тела с трещиной от направления переменной нагрузки.

В настоящей работе рассмотрена пространственная задача механики разрушения для стационарной плоской круговой трещины под воздействием гармонической волны растяжения - сжатия, распространяющейся под произвольным углом к поверхности трещины. Впервые исследовано влияние контактного взаимодействия на распределение коэффициента интенсивности напряжений (КИН) нормального отрыва в зависимости от частоты и угла падения волны.

**Постановка задачи.** Пусть в линейно упругом, однородном и изотропном пространстве с плоской круговой трещиной распространяется с частотой  $\omega$  и амплитудой  $\Phi_0$  гармоническая волна растяжения-сжатия. Серединная поверхность трещины имеет вид  $\Omega = \{x_1^2 + x_2^2 \leq a^2, x_3 = 0\}$ , а волна описывается функцией  $\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0 e^{i(k_1(x_1 \cos \alpha + x_3 \sin \alpha) - \omega t)}$ , где  $k_1 = \omega/c_1$  - волновое число;  $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  - скорость распространения продольных волн;  $\lambda$  и  $\mu$  - упругие постоянные Ламе;  $\rho$  - плотность;  $\alpha$  - угол между направлением распространения волны и осью  $Ox_1$  (см. рисунок 1).

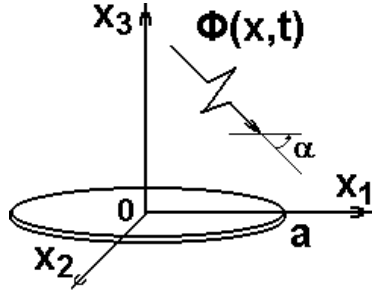


Рис 1.

Результатом действия падающей волны является нагрузка на поверхности трещины  $\mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t)$ , имеющая в рассматриваемом случае следующий вид:

$$\mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} -k_1^2 \Phi_0 \mu \sin 2\alpha (\cos(k_1 x_1 \cos \alpha) \cos(\omega t) - \sin(k_1 x_1 \cos \alpha) \sin(\omega t)) \\ 0 \\ -k_1^2 \Phi_0 (\lambda + 2\mu \sin^2 \alpha) (\cos(k_1 x_1 \cos \alpha) \cos(\omega t) - \sin(k_1 x_1 \cos \alpha) \sin(\omega t)) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, t \in [0, T].$$

Берега трещины движутся относительно друг друга: смыкаются и размыкаются в нормальном направлении, приходят в зацепление и проскальзывают в касательном направлении. При этом противоположные берега трещины контактируют между собой, в области контакта возникает отличная от нуля сила контактного взаимодействия  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ .

Положим, что компоненты векторов контактных сил взаимодействия и разрыва перемещений на берегах трещины удовлетворяют односторонним ограничениям в виде неравенств

$$\Delta u_3(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad q_3(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad \Delta u_3(\mathbf{x}, t) q_3(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, t \in [0, T], \quad (1)$$

и закону трения Кулона

$$|q_1(\mathbf{x}, t)| < k_\tau q_3(\mathbf{x}, t) \implies \partial_t \Delta u_1(\mathbf{x}, t) = 0,$$

$$|q_1(\mathbf{x}, t)| = k_\tau q_3(\mathbf{x}, t) \implies \partial_t \Delta u_1(\mathbf{x}, t) = -\lambda_\tau q_\tau(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, t \in [0, T], \quad (2)$$

где  $k_\tau$  - коэффициент трения, а  $\lambda_\tau = |\Delta u_1(\mathbf{x}, t)|/|q_1(\mathbf{x}, t)|$ .

**Метод решения задачи.** Область контакта берегов трещины изменяется во времени и неизвестна заранее, что делает задачу нелинейной, а ее решение не может быть представлено гармонической функцией. Поэтому, как было предложено в [1], будем искать периодическое решение задачи в виде рядов Фурье:

$$p_j(\mathbf{x}, t) = \frac{p_{j,\cos}^0(\mathbf{x})}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( p_{j,\cos}^k(\mathbf{x}) \cos(\omega_k t) + p_{j,\sin}^k(\mathbf{x}) \sin(\omega_k t) \right),$$

$$\Delta u_j(\mathbf{x}, t) = \frac{\Delta u_{j,\cos}^0(\mathbf{x})}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \Delta u_{j,\cos}^k(\mathbf{x}) \cos(\omega_k t) + \Delta u_{j,\sin}^k(\mathbf{x}) \sin(\omega_k t) \right),$$

где  $\omega_k = 2\pi k/T$ , а коэффициенты Фурье имеют вид:

$$p_{j,\cos}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p_j(\mathbf{x}, t) \cos(\omega_k t) dt, \quad p_{j,\sin}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p_j(\mathbf{x}, t) \sin(\omega_k t) dt,$$

$$\Delta u_{j,\cos}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T \Delta u_j(\mathbf{x}, t) \cos(\omega_k t) dt, \quad \Delta u_{j,\sin}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T \Delta u_j(\mathbf{x}, t) \sin(\omega_k t) dt.$$

Коэффициенты Фурье связаны системой граничных интегральных уравнений [3-6]:

$$p_{j,cos}^k(\mathbf{x}) - ip_{j,sin}^k(\mathbf{x}) = - \sum_{q=1}^3 \int_{\Omega} \left( F_{jq}^{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) + iF_{jq}^{Im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) \right) \times \\ \times \left( \Delta u_{q,cos}^k(\mathbf{y}) - i\Delta u_{q,sin}^k(\mathbf{y}) \right) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad k = \overline{0, +\infty}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (3)$$

где  $F_{jq}^{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$  и  $F_{jq}^{Im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$  представляют собой действительные и мнимые части фундаментальных решений динамической теории упругости  $F_{jq}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$  [1], имеющих в рассматриваемом случае следующий вид [3-5]:

$$F_{13}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = F_{31}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = F_{23}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = F_{32}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = 0,$$

$$j, q = 1, 2 \quad F_{jq}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = \\ = \frac{\mu}{4\pi} \left[ \delta_{jq} \left( -\frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \chi \right) + \frac{(y_j - x_j)(y_q - x_q)}{r^2} \left( -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{3}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{6}{r^2} \chi \right) \right],$$

$$F_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = \frac{1}{4\pi\mu} \left[ \lambda^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{4\lambda(\lambda + \mu)}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{2(\lambda^2 + 4\lambda\mu + 4\mu^2)}{r^2} \chi - \right. \\ \left. - \lambda^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{2(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right],$$

$$\psi = \left( \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_2} + 1 \right) \frac{e^{-l_2}}{r} - \frac{c_2^2}{c_1^2} \left( \frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_1} \right) \frac{e^{-l_1}}{r},$$

$$\chi = \left( \frac{3}{l_2^2} + \frac{3}{l_2} + 1 \right) \frac{e^{-l_2}}{r} - \frac{c_2^2}{c_1^2} \left( \frac{3}{l_1^2} + \frac{3}{l_1} + 1 \right) \frac{e^{-l_1}}{r},$$

где  $r$  - расстояние между точками наблюдения и нагружения;  $l_1 = i\omega_k r/c_1$ ,  $l_2 = i\omega_k r/c_2$ ;  $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$  - скорость распространения в материале поперечных волн.

В интегральных ядрах  $F_{jq}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$  содержатся неинтегрируемые гиперсингулярные особенности [3-6], поэтому интегралы в системе граничных интегральных уравнений (3) были рассмотрены в смысле конечной части по Адамару [7].

**Примеры решения задачи и анализ полученных результатов.** Численное решение задачи было получено методом коллокаций с использованием итерационного алгоритма [8]. Плоская круговая трещина расположена в материале со следующими механическими характеристиками: модуль упругости  $E = 200$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.25$ , плотность  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>.

Отметим, что полученное распределение нормальных и касательных компонент разрыва перемещений и контактной силы взаимодействия берегов трещины полностью удовлетворяет ограничениям (1), (2) и имеет вид аналогичный приведенному в [6].

К сожалению, объем настоящей работы лишает нас возможности провести детальный анализ распределения коэффициентов интенсивности напряжений продольного и поперечного сдвигов, зависящих, кроме угла падения волны и частоты нагружения, еще и от величины коэффициента трения, поэтому в дальнейшем остановимся лишь на распределении коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва.

На рисунке 2 приведено распределение вдоль фронта трещины максимального значения КИН нормального отрыва  $K_I^{\max}(\mathbf{x}) = \max_{t \in [0, T]} K_I(\mathbf{x}, t)$ , нормированного величиной  $\tilde{K}_I^{\text{stat}} = 2\sigma\sqrt{a/\pi}$ , соответствующей нормальному статическому нагружению круговой трещины без начального раскрытия [9]. Приведенные результаты были получены при фиксированном угле падения волны  $\alpha = \pi/6$  и двух различных значениях волнового числа  $k_2a$ , где  $k_2 = \omega/c_2$ .

Отметим, что значение КИН нормального отрыва при косонаправленном нагружении зависит от расположения точки в окрестности фронта. Причем с ростом волнового числа распределение КИН вдоль фронта трещины значительно усложняется, что справедливо в равной мере для результатов, полученных как с учетом контактного взаимодействия берегов, так и без учета взаимодействия.

Во всех рассмотренных в настоящей работе случаях КИН нормального отрыва достигает своего максимума  $K_I^{\max} = \max_{\mathbf{x}} K_I^{\max}(\mathbf{x})$  в окрестности наиболее удаленной точки фронта трещины в направлении распространения волны (точка  $(a, 0, 0)$  при  $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ ).

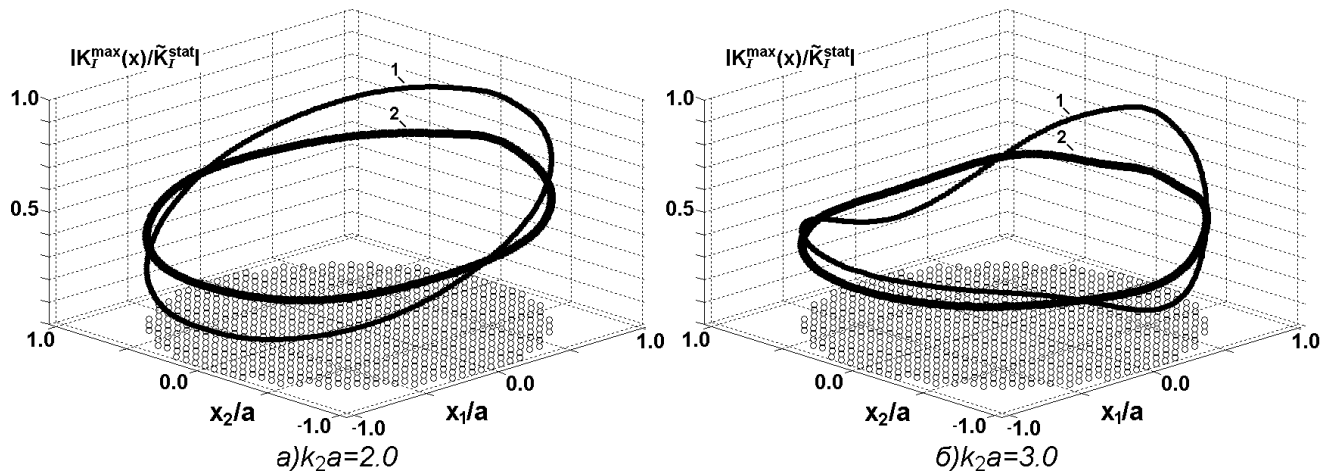


Рис. 2.  $|K_I^{\max}(\mathbf{x})/\tilde{K}_I^{\text{stat}}|$  в окрестности фронта трещины,  $\alpha = \pi/6$ :  
1 - без учета контактного взаимодействия; 2 - с учетом

На рисунке 3 приведены результаты вычисления нормированного максимального значения КИН нормального отрыва  $|K_I^{\max}/\tilde{K}_I^{\text{stat}}|$  в зависимости от волнового числа при различных углах падения волны.

Отметим, что различие между результатами, как и в случае нормального нагружения, может достигать существенных величин. Кроме того, при определенных частотах нагружения КИН нормального отрыва достигает своих максимальных значений при угле падения волны, отличном от нормального. Причем подобный эффект значительно ярче и в более широком диапазоне частот нагружения проявляется при решении задачи без учета контактного взаимодействия берегов трещины.

В заключение отметим, что распределение коэффициентов интенсивности напряжений продольного и поперечного сдвигов также носит достаточно сложный характер, хотя влияние контактного взаимодействия берегов и не столь велико, как для нормального отрыва.

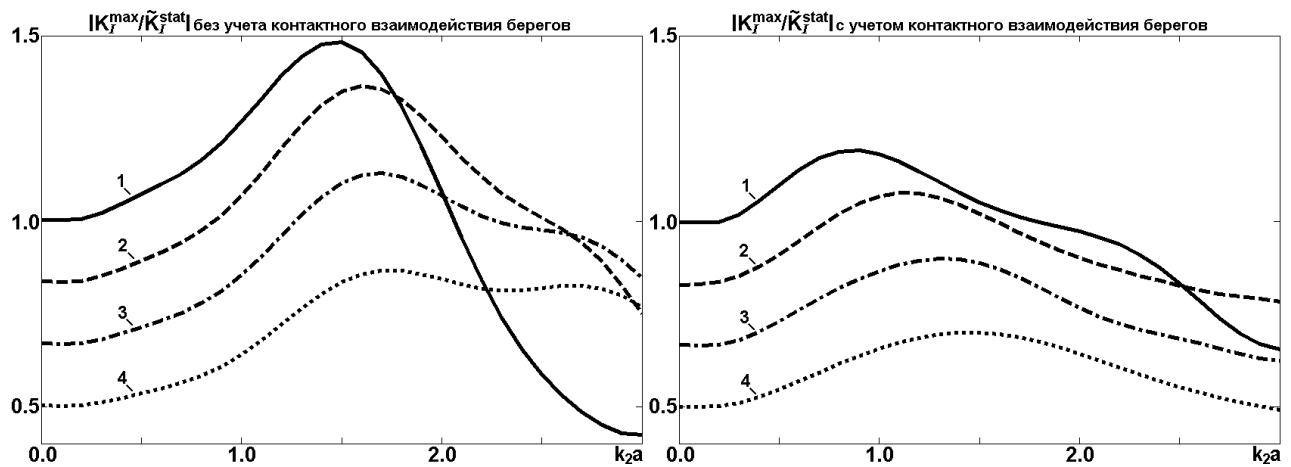


Рис. 3. Зависимость  $|K_I^{\max}/\tilde{K}_I^{\text{stat}}|$  от волнового числа:  
 1 -  $\alpha = \pi/2$ , 2 -  $\alpha = \pi/3$ , 3 -  $\alpha = \pi/4$ , 4 -  $\alpha = \pi/6$ ,

## Список литературы

- [1] Гузь А.Н., Зозуля В.В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках.: Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т. / Под ред. А.Н. Гузя. - Т. 4, кн. 2. - Киев, 1993. - 236 с.
- [2] Zozulya V.V., Men'shikova M.V. Dynamic contact problem for a plane with a finite crack // International Applied Mechanics. - 2002. - **38**, No 12. - P. 1459-1463.
- [3] Guz A.N., Menshykov O.V, Zozulya V.V. Surface contact of elliptical crack under normally incident tension-compression wave // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. - 2003. - **40**, No 3. - P. 285-291.
- [4] Guz A.N., Zozulya V.V., Men'shikov A.V. Three-dimensional contact problem for an elliptic crack interacting with a normally incident harmonic compression-expansion wave // International Applied Mechanics. - 2003. - **39**, No 12. - P. 1425-1428.
- [5] Guz A.N., Zozulya V.V., Men'shikov A.V. General spatial dynamic problem for an elliptic crack under the action of a normal shear wave, with consideration for the contact interaction of the crack faces // International Applied Mechanics. - 2004. - **40**, No 2. - P. 156-159.
- [6] Меньшиков А.В. Учет контакта берегов стационарной круговой трещины при гармоническом нагружении // Доповіді НАН України. - 2004. - № 8. - С. 43-47.
- [7] Zozulya V.V., Gonzalez-Chi P.I. Weakly singular, singular and hypersingular integrals in elasticity and fracture mechanics // Journal of the Chinese Institute of Engineers. - 1999. - **22**, No 6. - P. 763-775.
- [8] Zozulya V.V., Menshykov O.V. Use of the constrained optimization algorithms in some problems of fracture mechanics // Optimization and Engineering. - 2003. - **4**, No 4. - P. 365-384.
- [9] Balas J., Sladek J., Sladek V. Stress Analysis by Boundary Element Methods. - Amsterdam: Elsevier, 1989.

Институт механики им. С.П. Тимошенко, Киев, Украина  
 Центр микро- и наномеханики (SEMINACS), Абердинский университет, Шотландия

O.V. Menshykov Contact interaction of faces of the penny-shaped crack under an oblique harmonic loading

The contact interaction of the opposite faces of a penny-shaped crack under oblique incidence of a harmonic tension-compression wave is considered. The problem is solved by the method of boundary integral equations. The distribution of the stress intensity factor (opening mode) is studied for different values of the wave number and different angles of the incidence of the wave. The results are compared with those obtained without allowance for the contact interaction.

А.В. Меньшиков Контактное взаимодействие берегов круговой трещины при косонаправленном гармоническом нагружении

В работе рассмотрено контактное взаимодействие противоположных берегов круговой трещины под воздействием гармонической волны растяжения-сжатия, распространяющейся под произвольным углом к поверхности трещины. Задача решена при помощи метода граничных интегральных уравнений. Исследовано распределение коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва при различных значениях волнового числа и угла нагружения. Проведено сравнение с результатами, полученными без учета контактного взаимодействия берегов трещины.

Александр Васильевич Меньшиков  
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины  
ул. Нестерова 3, 03057 Киев, Украина  
тел. 050 323-38-95