

Дифракция плоской монохроматической электромагнитной волны на экранированной предканторовой решетке

Меньшиков А. В.

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы 4, 61077, Харьков, Украина

Содержание

1.	Постановка задач	16
2.	Сведение задач к сингулярным интегральным уравнениям	17
2.1.	Условия Неймана на решетке и экране	17
2.2.	Условие Неймана на решетке и импедансное на экране	19
2.3.	Условия Дирихле на решетке и экране	20
2.4.	Условие Дирихле на решетке и импедансное на экране	21
3.	Дискретные математические модели	22
3.1.	Дискретная математическая модель в случае -поляризации	22
3.2.	Дискретная математическая модель в случае -поляризации	24
4.	Поле в дальней зоне	25
4.1.	Вычисление поля в дальней зоне	25
4.2.	Некоторые результаты численного эксперимента	26

Abstract

Pre-Cantor Grating Boundary paired integral equations are obtained for 2D problems of the electromagnetic wave diffraction on the pre-Cantor grating, located above the shield. The boundary equations are reduced to the singular integral equation (SIE) of the first kind on a set of lengths that is solved numerically, using the discrete peculiarity method. The far zone field analysis is made across a broad range of problem parametric variations.

1. Постановка задач

Плоская монохроматическая электромагнитная волна (зависимость от времени дается множителем $e^{-i\omega t}$) под произвольным углом α падает на решетку из непересекающихся, идеально проводящих, бесконечно тонких лент, лежащих в одной плоскости и расположенных на высоте h над плоским экраном. Решетка является декартовым произведением предканторового множества [1,2] на отрезке $(0, l)$ на ось Ox . Сечение электродинамической системы плоскостью yOz изображено на рис. 1.

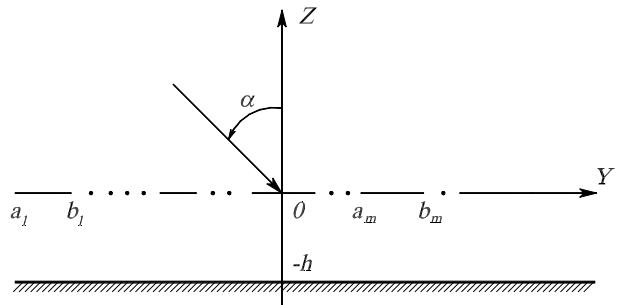


Рис. 1.

Обозначим $\Lambda = \left\{ (x, y) \in R^2 : x = 0, y \in \bar{L} \right\}$, где

$$L = L^n(0, l) = \bigcup_{i=1}^m (a_i, b_i); \quad m = 2^n; \quad a_i = \frac{l(p_i - 1)}{2 \cdot 3^n};$$

$$b_i = a_i + \frac{l}{3^n}, \quad i = \overline{1, m}; \quad p_1 = 1;$$

$p_{s+2^{k-1}} = 2 \cdot 3^k - r_{2^{k-1}+1-s}; \quad k = \overline{1, n}; \quad s = \overline{1, 2^{k-1}}$.
Кроме того, обозначим $L_i = (a_i, b_i), \quad i = \overline{1, m};$
 $CL = R \setminus L.$
Требуется найти рассеянное поле в свободном пространстве.
Ввиду однородности системы вдоль оси Ox ($\partial_x \equiv$

0) исходная векторная задача распадается на две скалярные. Полное электромагнитное поле есть суперпозиция двух полей: $(E_x, 0, 0)$, $(0, H_y, H_z)$ — так называемая E -поляризация; и $(0, E_y, E_z)$, $(H_x, 0, 0)$ — H -поляризация. Пространственная составляющая искомого поля $E_x = u(y, z)$ или $H_x = u(y, z)$, соответственно, удовлетворяет в свободном пространстве двумерному уравнению Гельмгольца

$$\partial_y^2 u + \partial_z^2 u + k^2 u = 0; k = \frac{\omega}{c}, \quad (1.1.1)$$

граничным условиям на лентах и экране, условию излучения Зоммерфельда и условию Майкснера на ребрах лент. В случае E -поляризации мы имеем дело с условием Дирихле на идеально проводящих лентах, в случае H -поляризации — с условием Неймана [3].

Были рассмотрены следующие граничные условия:

1. граничные условия Неймана на решетке и на экране;
2. граничные условия Неймана на решетке и импедансные на экране;
3. граничные условия Дирихле на решетке и на экране;
4. граничные условия Дирихле на решетке и импедансные на экране.

Далее, используя технику, разработанную в [4], выведем парные интегральные уравнения (ИУ) всех рассматриваемых задач.

Решение уравнения (1.1.1) с граничными условиями ищем в виде

$$u(y, z) = \begin{cases} u_0(y, z) + u^+(y, z), & z > 0, y \in R, \\ u_0(y, z) + u^-(y, z), & -h < z < 0, y \in R, \end{cases} \quad (1.1.2)$$

где $u_0(y, z)$ — известное решение уравнения Гельмгольца, представляющее сумму падающей и отраженной волн в "пустом" полупространстве ($z > -h$) над экраном (при отсутствии лент над ним), а функции $u^+(y, z)$ и $u^-(y, z)$ подлежат определению, и для них в каждом случае формулируется краевая задача с условиями излучения и условиями на ребре.

Для того чтобы в $\{y \in R, z > -h\} \setminus \Lambda$ было выполнено уравнение Гельмгольца (1.1.1) для функции $u(y, z)$, искомые функции $u^+(y, z)$, $z > 0$ и $u^-(y, z)$, $-h < z < 0$ должны удовлетворять уравнению (1.1.1) и должны быть выполнены условия сопряжения при $z = 0$ и $y \in CL$:

$$u^+(y, 0) = u^-(y, 0), \quad y \in CL, \quad (1.1.3)$$

$$\partial_z u^+(y, 0) = \partial_z u^-(y, 0), \quad y \in CL. \quad (1.1.4)$$

Так как волновой вектор падающего поля $\vec{k} = (k \sin \alpha, -k \cos \alpha)$, где α — угол между положительным направлением оси Oz и вектором $(-\vec{k})$, то $u_0(y, z)$ представляется в виде:

$$u_0(y, z) = e^{ik(y \sin \alpha - (z+h) \cos \alpha)} + A e^{ik(y \sin \alpha + (z+h) \cos \alpha)}. \quad (1.1.5)$$

Поле в области $\{z > 0, y \in R\}$ во всех случаях ищем в виде Фурье-представления

$$u^+(y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} c^+(\lambda) e^{i\lambda y - \gamma z} d\lambda, \quad z > 0, y \in R, \quad (1.1.6)$$

где $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$, и условия излучения будут выполнены, если $Re \gamma \geq 0, Im \gamma \leq 0$.

2. Сведение задач к сингулярным интегральным уравнениям

2.1. Условия Неймана на решетке и экране

Рассмотрим уравнение (1.1.1) со следующими граничными условиями на идеально проводящих лентах и экране

$$\partial_z u(y, 0) = 0, \quad y \in L, \quad (2.1.1)$$

$$\partial_z u(y, -h) = 0, \quad y \in R, \quad (2.1.2)$$

с условием излучения Зоммерфельда и условием Майкснера для функций $u^+(y, z)$ и $u^-(y, z)$.

Решение задачи будем искать в виде (1.1.2).

Коэффициент отражения A в представлении (1.1.5) определяется из условия Неймана на экране. В рассматриваемом случае сумма падающей и отраженной от экрана волн в "пустом" пространстве над экраном представляется в виде

$$u_0(y, z) = \left(e^{-ik(z+h) \cos \alpha} + e^{ik(z+h) \cos \alpha} \right) e^{iky \sin \alpha}. \quad (2.1.3)$$

Согласно (1.1.2) и (2.1.1) граничные условия на лентах можно записать в виде:

$$\partial_z u^+(y, 0) = -\partial_z u_0(y, 0), \quad y \in L, \quad (2.1.4)$$

$$\partial_z u^-(y, 0) = -\partial_z u_0(y, 0), \quad y \in L. \quad (2.1.5)$$

Искомое поле в области $\{-h < z < 0, y \in R\}$, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца (1.1.1) и условию Неймана на экране, представляем в виде

$$u^-(y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} c^-(\lambda) ch\gamma(z+h) e^{i\lambda y} d\lambda, \quad -h < z < 0, y \in R. \quad (2.1..6)$$

Переходя к выводу граничных интегральных уравнений, сложим и вычтем почленно уравнения (2.1.4) и (2.1.5). Имеем

$$\partial_z u^+(y, 0) + \partial_z u^-(y, 0) = -2\partial_z u_0(y, 0), y \in L; \quad (2.1..7)$$

$$\partial_z u^+(y, 0) - \partial_z u^-(y, 0) = 0, y \in L. \quad (2.1..8)$$

Из условий (1.1.4) и (2.1.8), с учетом представлений (1.1.6) и (2.1.6), находим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma [c^+(\lambda) + c^-(\lambda) sh\gamma h] e^{i\lambda y} d\lambda = 0, \lambda \in R,$$

откуда следует

$$c^+(\lambda) + c^-(\lambda) sh\gamma h = 0, \lambda \in R. \quad (2.1..9)$$

Теперь из условий (1.1.3) и (2.1.7), с учетом (1.1.6) и (2.1.6), получаем парное ИУ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (c^+(\lambda) - c^-(\lambda) ch\gamma h) e^{i\lambda y} d\lambda = 0, \quad y \in CL, \quad (2.1..10)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma (c^+(\lambda) - c^-(\lambda) sh\gamma h) e^{i\lambda y} d\lambda = 2\partial_z u_0(y, 0), y \in L. \quad (2.1..11)$$

Действуя так же, как в [4], введем в рассмотрение новую неизвестную функцию $F(y)$

$$F(y) = \partial_y u^+(y, 0) - \partial_y u^-(y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda [c^+(\lambda) - c^-(\lambda) ch\gamma h] e^{i\lambda y} d\lambda, \quad y \in R. \quad (2.1..12)$$

Из определения (2.1.12) функции $F(y)$, с учетом (2.1.10) и (1.1.3), следует

$$F(y) = 0, \quad y \in CL, \quad (2.1..13)$$

$$\int_{L_p} F_p(y) dy = 0, \quad p = \overline{1, m}, \quad (2.1..14)$$

где $F_p(y) = F(y), y \in L_p$.

Из определения (2.1.12) и (2.1.13) следует:

$$c^+(\lambda) - c^-(\lambda) ch\gamma h = \frac{1}{2\pi} \int_L F(\xi) \frac{e^{-i\lambda\xi} - 1}{i\lambda} d\xi, \lambda \in R. \quad (2.1..15)$$

Действительно, в силу (2.1.14)

$$\frac{1}{2\pi} \int_L F(\xi) \frac{e^{-i\lambda\xi} - 1}{i\lambda} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_L F(\xi) \frac{e^{-i\lambda\xi}}{i\lambda} d\xi, \lambda \in R. \quad (2.1..16)$$

Разрешая систему уравнений (2.1.9) и (2.1.15) относительно неизвестных амплитуд Фурье, получаем

$$c^-(\lambda) = -\frac{e^{-\gamma h}}{2\pi} \times \int_L F(\xi) \frac{e^{-i\lambda\xi} - 1}{i\lambda} d\xi, \lambda \in R. \quad (2.1..17)$$

$$c^+(\lambda) = \frac{e^{-\gamma h} sh\gamma h}{2\pi} \times \int_L F(\xi) \frac{e^{-i\lambda\xi} - 1}{i\lambda} d\xi, \lambda \in R. \quad (2.1..18)$$

Используя параметрическое представление преобразования Гильберта [6]

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda c(\lambda) e^{i\lambda\xi} d\lambda, \quad (2.1..19)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\xi)}{y - \xi} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| c(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda,$$

определение (2.1.12) и свойство (2.1.13) функции $F(y)$, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| (c^+(\lambda) - c^-(\lambda) ch\gamma h) e^{i\lambda y} d\lambda = -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{F(\xi)}{\xi - y} d\xi, y \in L. \quad (2.1..20)$$

Перепишем уравнение (2.1.11) следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| (c^+(\lambda) - c^-(\lambda) \operatorname{ch} \gamma h) e^{i\lambda y} d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} c^+(\lambda) (\gamma - |\lambda|) e^{i\lambda y} d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} c^-(\lambda) (|\lambda| \operatorname{ch} \gamma h - \gamma \operatorname{sh} \gamma h) e^{i\lambda y} d\lambda = 2\partial_z u_0(y, 0), y \in L. \quad (2.1.21)$$

Подставив выражения (2.1.17) и (2.1.18) в уравнение (2.1.21), с учетом (2.1.20) и (2.1.14), изменим порядок интегрирования и находим:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{F(\xi)}{\xi - y} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_L F(\xi) Q(y, \xi) d\xi = \\ \quad 2\partial_z u_0(y, 0), y \in L, \\ \int_{L_q} F_q(\xi) d\xi = 0, q = \overline{1, m}, \end{array} \right. \quad (2.1.22)$$

где ядро ИУ имеет вид

$$Q(y, \xi) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda(y - \xi) (\gamma - \lambda) e^{\gamma h} - \gamma e^{-\gamma h}}{\lambda e^{\gamma h}} d\lambda.$$

2.2. Условие Неймана на решетке и импедансное на экране

Рассмотрим уравнение (1.1.1) со следующими граничными условиями на идеально проводящих лентах и экране:

$$\partial_z u(y, 0) = 0, y \in L, \quad (2.2.1)$$

$$\partial_z u(y, -h) - B u(y, -h) = 0, y \in R, \quad (2.2.2)$$

с условием излучения Зоммерфельда и условием Майкснера для функций $u^+(y, z)$ и $u^-(y, z)$.

В (2.2.2) и далее B – поверхностный импеданс, описывающий свойства экрана, является скаляром и зависит лишь от частоты ω .

Действуя как в пункте 2.1, получим СИУ рассматриваемой задачи.

Коэффициент отражения A в представлении (1.1.5) определяется из импедансного условия на экране. В рассматриваемом случае получаем

$$u_0(y, z) = \left(e^{-ik(z+h) \cos \alpha} + \frac{ik \cos \alpha + B}{ik \cos \alpha - B} e^{ik(z+h) \cos \alpha} \right) e^{iky \sin \alpha} \quad (2.2.3)$$

Поле в области $\{-h < z < 0, y \in R\}$, удовлетворяющее уравнению (1.1.1) и импедансному условию на экране, представляем в виде

$$u^-(y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} c^-(\lambda) \frac{\gamma \operatorname{ch} \gamma(z+h) + B \operatorname{sh} \gamma(z+h)}{\gamma + B} e^{i\lambda y} d\lambda, \quad -h < z < 0, y \in R \quad (2.2.4)$$

Теперь из условий (1.1.3) и (2.2.1), с учетом (1.1.2), (1.1.6) и (2.2.4), получаем парное ИУ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(c^+(\lambda) - c^-(\lambda) \frac{\gamma \operatorname{ch} \gamma h + B \operatorname{sh} \gamma h}{\gamma + B} \right) \times e^{i\lambda y} d\lambda = 0, y \in CL, \quad (2.2.5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma \left(c^+(\lambda) - c^-(\lambda) \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma h + B \operatorname{ch} \gamma h}{\gamma + B} \right) \times e^{i\lambda y} d\lambda = 2\partial_z u_0(y, 0), y \in L. \quad (2.2.6)$$

Действуя так же, как в [4], введем в рассмотрение функцию $F(y)$

$$F(y) = \partial_y u^+(y, 0) - \partial_y u^-(y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda \left(c^+(\lambda) - c^-(\lambda) \frac{\gamma \operatorname{ch} \gamma h + B \operatorname{sh} \gamma h}{\gamma + B} \right) \times e^{i\lambda y} d\lambda, y \in R. \quad (2.2.7)$$

Из определения (2.2.7) функции $F(y)$, с учетом (2.2.5) и (1.1.3), следует

$$F(y) = 0, y \in CL, \quad (2.2.8)$$

$$\int_{L_p} F_p(y) dy = 0, p = \overline{1, m}. \quad (2.2.9)$$

Из условий (1.1.3) и (2.2.1) получаем связь между $c^+(\lambda)$ и $c^-(\lambda)$, а затем из определения (2.2.7) функции $F(y)$ и ее свойств (2.2.8) и (2.2.9) находим

$$c^-(\lambda) = -\frac{e^{-\gamma h}}{2\pi} \int_L F(\xi) \frac{e^{-i\lambda\xi} - 1}{i\lambda} d\xi, \lambda \in R, \quad (2.2.10)$$

$$c^+(\lambda) = \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma h + B \operatorname{ch} \gamma h}{e^{\gamma h} (B + \gamma)} \frac{1}{2\pi} \times \int_L F(\xi) \frac{e^{-i\lambda\xi} - 1}{i\lambda} d\xi, \lambda \in R. \quad (2.2.11)$$

Действуя как в пункте 2.1, используя представление (2.1.19), окончательно находим:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{F(\xi)}{\xi - y} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_L F(\xi) Q(y, \xi) d\xi = \\ \qquad \qquad \qquad 2\partial_z u_0(y, 0), y \in L, \\ \int_{L_q} F_q(\xi) d\xi = 0, q = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (2.2..12)$$

где ядро ИУ имеет вид

$$Q(y, \xi) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda(y - \xi)}{\lambda} \times \frac{(B + \gamma)(\gamma - \lambda)e^{\gamma h} + \gamma(B - \gamma)e^{-\gamma h}}{e^{\gamma h}(B + \gamma)} d\lambda.$$

2.3. Условия Дирихле на решетке и экране

Рассмотрим уравнение (1.1.1) со следующими граничными условиями на идеально проводящих лентах и экране:

$$u(y, 0) = 0, y \in L, \quad (2.3..1)$$

$$u(y, -h) = 0, y \in R, \quad (2.3..2)$$

с условием излучения Зоммерфельда и условием Майкснера для функций $u^+(y, z)$ и $u^-(y, z)$.

Коэффициент отражения A в представлении (1.1.5) определяется из условия Дирихле на экране. В рассматриваемом случае

$$u_0(y, z) = \left(e^{-ik(z+h) \cos \alpha} - e^{ik(z+h) \cos \alpha} \right) e^{iky \sin \alpha}. \quad (2.3..3)$$

Искомое поле в области $\{-h < z < 0, y \in R\}$, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца (1.1.1) и условию Дирихле на экране, представляем в виде

$$u^-(y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} c^-(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(z + h) e^{i\lambda y} d\lambda, \quad -h < z < 0, y \in R. \quad (2.3..4)$$

Теперь из условий (1.1.3) и (2.3.1), с учетом (1.1.2), (1.1.6) и (2.3.4), получаем парное ИУ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(c^+(\lambda) + c^-(\lambda) \operatorname{ch} \gamma h) e^{i\lambda y} d\lambda = 0, \quad y \in CL, \quad (2.3..5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (c^+(\lambda) + c^-(\lambda) \operatorname{sh} \gamma h) e^{i\lambda y} d\lambda = -2u_0(y, 0), y \in L. \quad (2.3..6)$$

Действуя так же, как в [4], введем в рассмотрение функцию $F(y)$

$$F(y) = -(\partial_z u^+(y, 0) - \partial_z u^-(y, 0)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(c^+(\lambda) + c^-(\lambda) \operatorname{ch} \gamma h) e^{i\lambda y} d\lambda, y \in R. \quad (2.3..7)$$

Из определения (2.3.7), с учетом (2.3.5), следует

$$F(y) = 0, y \in CL. \quad (2.3..8)$$

Из условий (1.1.3) и (2.3.1), используя (2.3.7), (2.3.8) находим

$$c^-(\lambda) = \frac{e^{-\gamma h}}{2\pi\gamma} \int_L F(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi, \quad \lambda \in R, \quad (2.3..9)$$

$$c^+(\lambda) = (1 - e^{-2\gamma h}) \frac{1}{4\pi\gamma} \times \int_L F(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi, \quad \lambda \in R. \quad (2.3..10)$$

Используя (2.3.6), (2.3.9) и (2.3.10), получили:

$$\frac{1}{\pi} \int_L F(\xi) Q(y, \xi) d\xi = -2u_0(y, 0), y \in L, \quad (2.3..11)$$

где ядро ИУ имеет вид

$$Q(y, \xi) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda(y - \xi)}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma h}) d\lambda. \quad (2.3..12)$$

Перепишем интеграл $Q(z)$ следующим образом:

$$Q(z) = - \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma h} \frac{\cos \lambda z}{\gamma} d\lambda + \int_0^k \frac{\cos \lambda z}{\gamma} d\lambda + \int_k^{+\infty} \frac{\cos \lambda z}{\gamma} d\lambda. \quad (2.3..13)$$

Применив в (2.3.13) замену переменных $\lambda = k\zeta$, с учетом условий излучения Зоммерфельда и соответствующего выбора ветви радикала γ , получаем

$$Q(z) = - \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma h} \frac{\cos \lambda z}{\gamma} d\lambda + i \int_0^1 \frac{\cos kz\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta + \int_1^{+\infty} \frac{\cos kz\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}} d\zeta. \quad (2.3..14)$$

С использованием представления Пуассона [5] для функции Бесселя нулевого порядка и любого вещественного аргумента второе слагаемое в (2.3.14) может быть записано в виде

$$i \int_0^1 \frac{\cos kz\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta = i \frac{\pi}{2} J_0(kz). \quad (2.3..15)$$

Последнее слагаемое в (2.3.14) с точностью до множителя определяет функцию Неймана нулевого порядка положительного аргумента в представлении Мелера-Сонина [5]

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos kz\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}} d\zeta = -\frac{\pi}{2} N_0(kz). \quad (2.3..16)$$

Учитывая (2.3.15) и (2.3.16), можем переписать выражение (2.3.14) следующим образом:

$$Q(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda z}{\gamma} (-e^{-2\gamma h}) d\lambda + i \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(k|z|).$$

Выделим в $Q(z)$ логарифм, имеем $Q(z) = -\ln|z| + G(z)$, где

$$G(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda z}{\gamma} (-e^{-2\gamma h}) d\lambda + i \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(k|z|) + \ln|z|. \quad (2.3..17)$$

Итак, получили СИУ

$$-\frac{1}{\pi} \int_L F(\xi) \ln|y-\xi| d\xi + \frac{1}{\pi} \int_L F(\xi) G(y, \xi) d\xi = -2u_0(y, 0), \quad y \in L. \quad (2.3..18)$$

2.4. Условие Дирихле на решетке и импедансное на экране

Рассмотрим уравнение (1.1.1) со следующими граничными условиями на идеально проводящих лентах и экране

$$u(y, 0) = 0, \quad y \in L, \quad (2.4..1)$$

$$\partial_z u(y, -h) - Bu(y, -h) = 0, \quad y \in R, \quad (2.4..2)$$

с условием излучения Зоммерфельда и условием Майкснера для функций $u^+(y, z)$ и $u^-(y, z)$.

Действуя как в пунктах 2.1 и 2.3, получим СИУ рассматриваемой задачи.

В рассматриваемом случае, сумма падающей и отраженной от экрана волн в "пустом" полупространстве над экраном представляется в виде (2.2.3), а поле в области $\{-h < z < 0, y \in R\}$, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца (1.1.1) и импедансному условию на экране, представляем в виде (2.2.4).

Теперь из условий (1.1.3) и (2.4.1), с учетом (1.1.2), (1.1.6) и (2.2.4), получаем парное ИУ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma \left(c^+(\lambda) + c^-(\lambda) \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma h + B \operatorname{ch} \gamma h}{\gamma + B} \right) \times e^{i\lambda y} d\lambda = 0, \quad y \in CL, \quad (2.4..3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(c^+(\lambda) + c^-(\lambda) \frac{\gamma \operatorname{ch} \gamma h + B \operatorname{sh} \gamma h}{\gamma + B} \right) \times e^{i\lambda y} d\lambda = -2u_0(y, 0), \quad y \in L. \quad (2.4..4)$$

Действуя так же, как в [4], введем в рассмотрение новую неизвестную функцию $F(y)$

$$F(y) = -(\partial_z u^+(y, 0) - \partial_z u^-(y, 0)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma \left(c^+(\lambda) + c^-(\lambda) \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma h + B \operatorname{ch} \gamma h}{\gamma + B} \right) \times e^{i\lambda y} d\lambda, \quad y \in R. \quad (2.4..5)$$

Из определения (2.4.7), с учетом (2.4.5), следует

$$F(y) = 0, \quad y \in CL. \quad (2.4..6)$$

Из (1.1.3) и (2.4.1), используя (2.4.5) и (2.4.6), находим

$$c^-(\lambda) = \frac{e^{-\gamma h}}{2\pi\gamma} \int_L F(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi, \quad \lambda \in R, \quad (2.4..7)$$

$$c^+(\lambda) = \frac{\gamma \operatorname{ch} \gamma h + B \operatorname{sh} \gamma h}{(\gamma + B)e^{\gamma h}} \frac{1}{2\pi\gamma} \times \int_L F(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi, \quad \lambda \in R. \quad (2.4..8)$$

Используя (2.4.4), (2.4.7) и (2.4.8), получили:

$$\frac{1}{\pi} \int_L F(\xi) Q(y, \xi) d\xi = -2u_0(y, 0), \quad y \in L, \quad (2.4..9)$$

где

$$Q(y, \xi) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\gamma \operatorname{ch} \gamma h + B \operatorname{sh} \gamma h \cos \lambda(y - \xi)}{(\gamma + B)e^{\gamma h}} \frac{\cos \lambda(y - \xi)}{\gamma} d\lambda.$$

Действуя как в пункте 2.3, окончательно получили СИУ с логарифмическим ядром

$$-\frac{1}{\pi} \int_L F(\xi) \ln |y - \xi| d\xi + \frac{1}{\pi} \int_L F(\xi) G(y, \xi) d\xi = -2u_0(y, 0), \quad y \in L, \quad (2.4..10)$$

где

$$G(y, \xi) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda(y - \xi)}{\gamma} \frac{\gamma - B}{\gamma + B} e^{-2\gamma h} d\lambda + i\frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(k|y - \xi|) + \ln |y - \xi|.$$

3. Дискретные математические модели

3.1. Дискретная математическая модель в случае -поляризации

Задачи дифракции H -поляризованной электромагнитной волны на экранированной решетке приводят нас к СИУ первого рода с ядром Коши на системе непересекающихся отрезков (смотри (2.1.22) и (2.2.12))

$$-\frac{1}{\pi} \int_L \frac{F(\xi)}{\xi - y} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_L F(\xi) Q(y, \xi) d\xi = f(y), \quad y \in L, \quad (3.1..1)$$

с дополнительными условиями

$$\int_{L_q} F_q(\xi) d\xi = 0, \quad q = \overline{1, m}. \quad (3.1..2)$$

Перепишем уравнение (3.1.1) следующим эквивалентным образом

$$-\frac{1}{\pi} \int_L \frac{F_q(\xi)}{\xi - y} d\xi + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{L_q} F_p(\xi) Q_{qp}(y, \xi) d\xi = f_q(y), \quad y \in L_q, \quad q = \overline{1, m}, \quad (3.1..3)$$

где $f_q(y) = f(y)$, $y \in L_q$, $q = \overline{1, m}$, а интегральные ядра $Q_{qp}(y, \xi)$ имеют вид

$$Q_{qp}(y, \xi) = Q(y, \xi) - \eta_{qp} \frac{1}{\xi - y}, \quad y \in L_q, \quad \xi \in L_p, \quad \eta_{qp} = \begin{cases} 1, & p \neq q, \\ 0, & p = q. \end{cases}$$

В соответствии с условием Майкснера, ограничивающим рост поля при приближении к краю ленты, единственное решение системы (3.1.3), отвечающее физическим требованиям задачи, с дополнительными условиями (3.1.2) будем искать в классе функций, представимых в виде

$$F_q(y) = \frac{V_q(y)}{\sqrt{(b_q - y)(y - a_q)}}, \quad a_q < y < b_q, \quad q = \overline{1, m}, \quad (3.1..4)$$

где $V_q(y)$ — функции непрерывные по Гельдеру при $y \in (a_q, b_q)$.

Используя отображение

$$g_q(t) : [-1, 1] \rightarrow [a_q, b_q] : t \mapsto \xi = g_q(t) = \frac{b_q - a_q}{2} t + \frac{b_q + a_q}{2}, \quad t \in (-1, 1), \quad q = \overline{1, m} \quad (3.1..5)$$

и представление (3.1.4), систему СИУ (3.1.3) относительно неизвестных функций $F_q(\xi)$, $q \in \overline{1, m}$ с дополнительным условием (3.1.2), заданную на объединении непересекающихся интервалов L , сводим к системе СИУ относительно функций $\nu_q(t) = V_q(g_q(t))$ на интервале $(-1, 1)$. Имеем

$$-\frac{1}{\pi} \frac{1}{b_q - a_q} \int_{-1}^1 \frac{\nu_q(t)}{t - t_0} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \nu_p(t) K_{qp}(t_0, t) \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = f_q(g_q(t_0)), \quad t_0 \in (-1, 1), \quad q = \overline{1, m}, \quad (3.1..6)$$

$$\int_{-1}^1 \nu_q(t) \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = 0, \quad q = \overline{1, m}, \quad (3.1..7)$$

где непрерывные составляющие ядер ИУ $K_{qp}(t_0, t) = Q_{qp}(g_q(t_0), g_p(t))$.

Дискретизацию системы будем проводить в рамках общей схемы метода дискретных особенностей [7,8,9]. Гладкие и сингулярные части уравнений (3.1.6), (3.1.7) аппроксимируются интерполяционными квадратурными формулами Гаусса по двум

системам узлов. Узлы представляют собой нули полиномов Чебышева I и II рода.

Искомые функции $\nu_q(t)$ интерполируются полиномами Лагранжа $\nu_q^{(n_q)}(t)$, $q = \overline{1, m}$ степени $(n_q - 1)$ по n_q узлам, совпадающим с нулями полиномов Чебышева I рода.

Таким образом, получили приближенную систему СИУ

$$-\frac{1}{\pi} \frac{2}{b_q - a_q} \int_{-1}^1 \frac{\nu_q^{(n_q)}(t)}{t - t_0} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \nu_p^{(n_p)}(t) K_{qp}(t_0, t) \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = f_q(g_q(t_0)),$$

$$t_0 \in (-1, 1), q = \overline{1, m}, \quad (3.1..8)$$

с дополнительными условиями

$$\int_{-1}^1 \nu_q^{(n_q)}(t) \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = 0, q = \overline{1, m}. \quad (3.1..9)$$

Имеют место следующие квадратурные формулы:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \nu_q^{(n_q)}(t) \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} \nu_{qk}, q = \overline{1, m}, \quad (3.1..10)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\nu_q^{(n_q)}(t)}{t - t_{0j}^{(n_q-1)}} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} \frac{\nu_{qk}}{t_k^{(n_q)} - t_{0j}^{(n_q-1)}},$$

$$j = \overline{1, n_q - 1}, q = \overline{1, m}, \quad (3.1..11)$$

где введено обозначение $\nu_{qk} = \nu_q^{(n_q)}(t_k^{(n_q)})$.

В формулах (3.1.10), (3.1.11)

- $\nu_q^{(n_q)}(t)$ -полином Лагранжа степени $(n_q - 1)$, интерполирующий искомую функцию $\nu_q(t)$;
- $t_k^{(n_q)} = \cos \frac{2k - 1}{2n_q} \pi$, $k = \overline{1, n_q}$, $q = \overline{1, m}$ — нули полинома Чебышева I рода степени n_q ;
- $t_{0j}^{(n_q-1)} = \cos \frac{j}{n_q} \pi$, $j = \overline{1, n_q - 1}$, $q = \overline{1, m}$ — нули полинома Чебышева II рода степени $(n_q - 1)$.

Такой способ дискретизации системы (3.1.8), (3.1.9) позволяет свести её к решению эквивалентной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно значений интерполяционных функций ν_{qk} , $k = \overline{1, n_q}$, $q = \overline{1, m}$ в заданных узлах сетки.

Используя (3.1.10), (3.1.11) и переходя к дискретному аналогу системы СИУ (3.1.6), (3.1.7), получаем СЛАУ:

$$-\frac{1}{n_q} \frac{2}{b_q - a_q} \sum_{k=1}^{n_q} \frac{\nu_{qk}}{t_k^{(n_q)} - t_{0j}^{(n_q-1)}} + \sum_{p=1}^m \frac{1}{n_p} \sum_{k=1}^{n_p} K_{qp}(t_{0j}^{(n_q-1)}, t_k^{(n_p)}) \nu_{pk} = f_q(g_q(t_{0j}^{(n_q-1)})), j = \overline{1, n_q - 1}, q = \overline{1, m}, \quad (3.1..12)$$

$$\frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} \nu_{qk} = 0, q = \overline{1, m}. \quad (3.1..13)$$

СЛАУ (3.1.12), (3.1.13) содержит $\sum_{q=1}^m n_q$ уравнений и $\sum_{q=1}^m n_q$ неизвестных функций.

Приближенные значения амплитуд Фурье $\tilde{c}^+(\lambda)$ и $\tilde{c}^-(\lambda)$ вычисляются при помощи квадратурной формулы Гаусса (3.1.10).

Согласно (2.1.17) и (2.1.18) получаем для случая с краевыми условиями Неймана на решетке и экране

$$\tilde{c}^-(\lambda) = -\frac{e^{-\gamma h}}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{n_k} \sum_{p=1}^{n_k} \nu_{kp} \times \frac{e^{-i\lambda g_k(t_p^{(n_k)})} - 1}{i\lambda}, \quad (3.1..14)$$

$$\tilde{c}^+(\lambda) = \frac{e^{-\gamma h} \operatorname{sh} \gamma h}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{n_k} \sum_{p=1}^{n_k} \nu_{kp} \times \frac{e^{-i\lambda g_k(t_p^{(n_k)})} - 1}{i\lambda}, \quad (3.1..15)$$

Согласно (2.2.10) и (2.2.11) получаем для случая с краевым условием Неймана на решетке и импедансным на экране

$$\tilde{c}^-(\lambda) = -\frac{e^{-\gamma h}}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{n_k} \sum_{p=1}^{n_k} \nu_{kp} \times \frac{e^{-i\lambda g_k(t_p^{(n_k)})} - 1}{i\lambda}, \quad (3.1..16)$$

$$\tilde{c}^+(\lambda) = \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma h + B \operatorname{ch} \gamma h}{2(\gamma + B)e^{\gamma h}} \sum_{k=1}^m \frac{1}{n_k} \sum_{p=1}^{n_k} \nu_{kp} \times \frac{e^{-i\lambda g_k(t_p^{(n_k)})} - 1}{i\lambda}, \quad (3.1..17)$$

3.2. Дискретная математическая модель в случае -поляризации

Задачи дифракции E -поляризованной электромагнитной волны на экранированной решетке приводят нас к СИУ с логарифмическим ядром на системе непересекающихся отрезков (смотри (2.3.18) и (2.4.12))

$$-\frac{1}{\pi} \int_L F(\xi) \ln |y - \xi| d\xi + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_L F(\xi) G(y, \xi) d\xi = f(y), \quad y \in L, \quad (3.2..1)$$

Перепишем уравнение (3.2.1) следующим эквивалентным образом

$$-\frac{1}{\pi} \int_L F_q(\xi) \ln |y - \xi| d\xi + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{L_p} F_p(\xi) G_{qp}(y, \xi) d\xi = f_q(y), \quad y \in L_q, \quad q = \overline{1, m}, \quad (3.2..2)$$

где интегральные ядра $G_{qp}(y, \xi)$ имеют вид

$$G_{qp}(y, \xi) = G(y, \xi) - \eta_{qp} \ln |y - \xi|, \quad y \in L_q, \quad \xi \in L_p, \quad \eta_{qp} = \begin{cases} 1, & p \neq q, \\ 0, & p = q. \end{cases}$$

Решение системы (3.2.2) ищем в виде (3.1.4). Используя (3.1.5), получаем:

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln |t - t_0| \nu_q(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \nu_p(t) K_{qp}(t_0, t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = f_q(g_q(t_0)), \quad t_0 \in (-1, 1), \quad q = \overline{1, m}, \quad (3.2..3)$$

где

$$K_{qp}(t_0, t) = G_{qp}(g_q(t_0), g_p(t)) - \mu_{qp} \ln \left(\frac{b_q - a_q}{2} \right), \quad \mu_{qp} = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q. \end{cases}$$

Таким образом, мы получили систему СИУ с логарифмическим ядром на интервале $(-1, 1)$. Существует эффективный численный метод решения систем СИУ с ядром Коши (изложенный в пункте

3.1). Сведем систему (3.2.3) к системе уравнений с ядром Коши.

Продифференцировав (3.2.3) по переменной t_0 , получим:

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \nu_q(t) \frac{dt}{t - t_0 \sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \nu_p(t) \frac{\partial}{\partial t_0} (K_{qp}(t_0, t)) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = f'_q(g_q(t_0)), \quad t_0 \in (-1, 1), \quad q = \overline{1, m}. \quad (3.2..4)$$

Из (3.2.4) следует

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln |t - t_0| \nu_q(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \nu_p(t) K_{qp}(t_0, t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = f_q(g_q(t_0)) + C, \quad t_0 \in (-1, 1), \quad q = \overline{1, m}, \quad (3.2..5)$$

где C — произвольная константа. Для того чтобы системы (3.2.3) и (3.2.4) были эквивалентны, требуется, чтобы $C = 0$. Проинтегрируем систему (3.2.5) с весом $(1 - t_0^2)^{-1/2}$ на интервале $(-1, 1)$.

Тогда, учитывая соотношения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln |t - t_0| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} = -\ln 2, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} = 1,$$

получаем

$$\frac{\ln 2}{\pi} \int_{-1}^1 \nu_q(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{qp}(t_0, t) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} \right) \nu_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f_q(g_q(t_0)) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}}, \quad q = \overline{1, m}. \quad (3.2..6)$$

Итак, получена система СИУ с ядром Коши (3.2.4) с дополнительными условиями (3.2.6).

Дискретизация системы проводится по методу дискретных особенностей [7,8,9]. Действуя так же как в пункте 3.1, используя (3.1.10), (3.1.11), получаем СЛАУ:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} \frac{\nu_{qk}}{t_k^{(n_q)} - t_{0j}^{(n_q-1)}} + \\
 & \sum_{p=1}^m \frac{1}{n_p} \sum_{k=1}^{n_p} \frac{\partial}{\partial t_0} K_{qp} \left(t_{0j}^{(n_q-1)}, t_k^{(n_q)} \right) \nu_{pk} = \\
 & f'_q \left(g_q \left(t_{0j}^{(n_q-1)} \right) \right), \quad j = \overline{1, n_q - 1}, \\
 & \qquad \qquad \qquad q = \overline{1, m}, \quad (3.2..7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\ln 2}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} \nu_{qk} + \sum_{p=1}^m \frac{1}{n_p} \sum_{k=1}^{n_p} \nu_{pk} \frac{1}{n_q} \times \\
 & \sum_{s=1}^{n_q} K_{qp} \left(t_s^{(n_q)}, t_k^{(n_p)} \right) = \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} f_q \left(g_q \left(t_k^{(n_q)} \right) \right), \\
 & \qquad \qquad \qquad q = \overline{1, m}. \quad (3.2..8)
 \end{aligned}$$

СЛАУ (3.2.7), (3.2.8) содержит $\sum_{q=1}^m n_q$ уравнений и $\sum_{q=1}^m n_q$ неизвестных функций.

Согласно (2.3.9) и (2.3.10) получаем для случая с крайвыми условиями Дирихле на решетке и экране

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}^-(\lambda) &= \frac{e^{-\gamma h}}{2\gamma} \sum_{k=1}^m \frac{1}{n_k} \sum_{p=1}^{n_k} \nu_{kp} e^{-i\lambda g_k(t_p^{(n_k)})}, \quad (3.2..9) \\
 \tilde{c}^+(\lambda) &= \frac{(1 - e^{-2\gamma h})}{4\gamma} \sum_{k=1}^m \frac{1}{n_k} \times \\
 & \sum_{p=1}^{n_k} \nu_{kp} e^{-i\lambda g_k(t_p^{(n_k)})}, \quad (3.2..10)
 \end{aligned}$$

Согласно (2.4.7) и (2.4.8) получаем для случая с крайвым условием Дирихле на решетке и импедансным на экране

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}^-(\lambda) &= \frac{e^{-\gamma h}}{2\gamma} \sum_{k=1}^m \frac{1}{n_k} \sum_{p=1}^{n_k} \nu_{kp} e^{-i\lambda g_k(t_p^{(n_k)})}, \quad (3.2..11) \\
 \tilde{c}^+(\lambda) &= \frac{\gamma \operatorname{ch} \gamma h + B \operatorname{sh} \gamma h}{2\gamma(\gamma + B)e^{\gamma h}} \sum_{k=1}^m \frac{1}{n_k} \times \\
 & \sum_{p=1}^{n_k} \nu_{kp} e^{-i\lambda g_k(t_p^{(n_k)})}, \quad (3.2..12)
 \end{aligned}$$

Строгое обоснование приведенного численного метода с оценками среднеквадратичного отклонения найденных интерполяционных полиномов от точных решений даны в работах [7,8], [10].

4. Поле в дальней зоне

4.1. Вычисление поля в дальней зоне

При анализе "поля в дальней зоне" ($kr \gg 1$, $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, $z > 0$, $y \in R$) можно избежать громоздких вычислений интеграла (1.1.6).

В полярных координатах представление (1.1.6) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 u^+(R, \varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} c^+(\lambda) e^{i\lambda R \cos \varphi - \gamma R \sin \varphi} d\lambda, \\
 & 0 < \varphi < \pi, \quad 0 < R \leq +\infty. \quad (4.1..1)
 \end{aligned}$$

Применяя метод стационарной фазы [11], получим

$$u^+(R, \varphi) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} e^{i(kR - \pi/4)} \sqrt{\frac{2\pi}{kR}} \Phi(\varphi), \quad (4.1..2)$$

где

$$\Phi(\varphi) = c^+(k \cos \varphi) k \sin \varphi. \quad (4.1..3)$$

Для наглядности описания поля в дальней зоне введена функция $\Phi(\varphi)$ — диаграмма направленности поля. Кроме того, введем следующие обозначения: $\Phi_1(\varphi)$, $\Phi_2(\varphi)$, $\Phi_3(\varphi)$, $\Phi_4(\varphi)$ — диаграммы направленности для случаев, рассмотренных, соответственно, в пунктах 2.1, 2.2, 2.3, 2.4.

Согласно (2.1.18), (2.2.11), (2.3.10), (2.4.8), соответственно, получаем

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(\varphi) &= \frac{1 - e^{2ikh \sin \varphi}}{4\pi i} \sin \varphi \times \\
 & \int_L F(\xi) \frac{(e^{-ik\xi \cos \varphi} - 1)}{\cos \varphi} d\xi. \quad (4.1..4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_2(\varphi) &= \frac{ik \sin \varphi \operatorname{sh}(ikh \sin \varphi) + B \operatorname{ch}(ikh \sin \varphi)}{2\pi i(B - ik \sin \varphi) e^{-ikh \sin \varphi}} \times \\
 & \sin \varphi \int_L F(\xi) \frac{(e^{-ik\xi \cos \varphi} - 1)}{\cos \varphi} d\xi. \quad (4.1..5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_3(\varphi) &= \frac{e^{2ikh \sin \varphi} - 1}{4\pi i} \times \\
 & \int_L F(\xi) e^{-ik\xi \cos \varphi} d\xi. \quad (4.1..6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_4(\varphi) &= \frac{ik \sin \varphi \operatorname{ch}(ikh \sin \varphi) + B \operatorname{sh}(ikh \sin \varphi)}{2\pi i(B - ik \sin \varphi) e^{-ikh \sin \varphi}} \times \\
 & \int_L F(\xi) e^{-ik\xi \cos \varphi} d\xi. \quad (4.1..7)
 \end{aligned}$$

Приближенное значение диаграммы направленности вычисляется при помощи (3.1.10).

Согласно (4.1.4)-(4.1.7) получаем

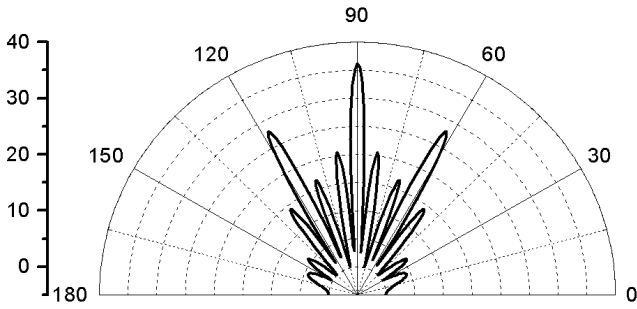


Рис. 2. $\alpha = 0, m = 4, n = 5$

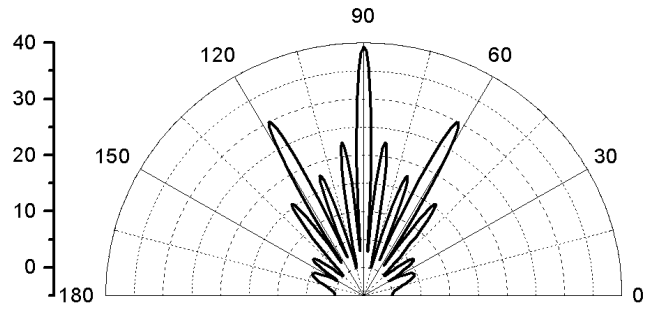


Рис. 3. $\alpha = 0, m = 4, n = 10$

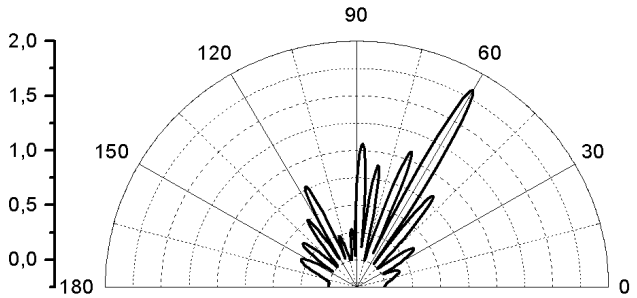


Рис. 4. $\alpha = \pi/6, m = 16, n = 6$

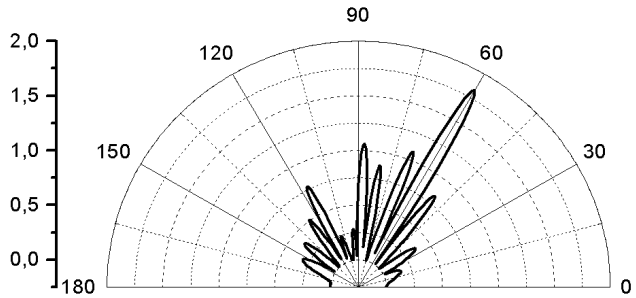


Рис. 5. $\alpha = \pi/6, m = 16, n = 10$

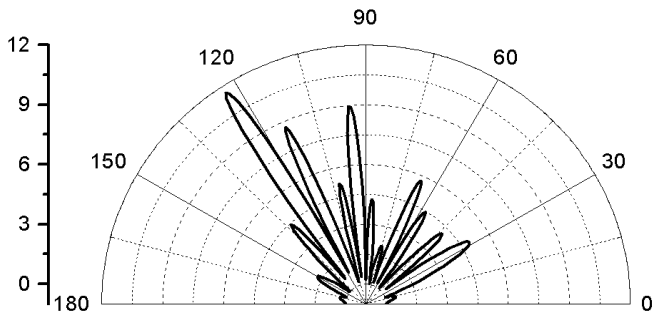


Рис. 6. $\alpha = \pi/3, m = 8, n = 4$

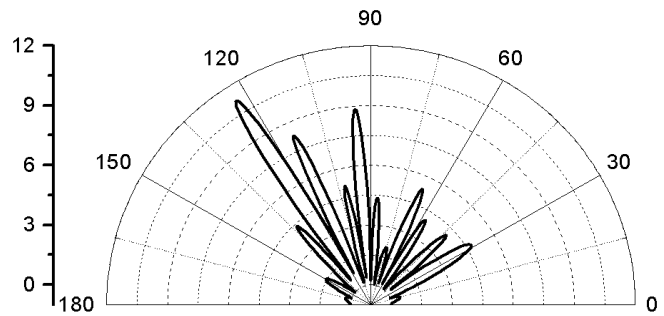


Рис. 7. $\alpha = \pi/3, m = 8, n = 10$

$$\tilde{\Phi}_1(\varphi) = \frac{1 - e^{2ikh \sin \varphi}}{4i} \sin \varphi \times \sum_{k=1}^m \frac{1}{n_k} \sum_{p=1}^{n_k} \nu_{kp} \frac{e^{-ikg_k(t_p^{(n_k)}) \cos \varphi} - 1}{\cos \varphi} \quad (4.1..8)$$

$$\tilde{\Phi}_2(\varphi) = \frac{ik \sin \varphi \operatorname{sh}(ikh \sin \varphi) + B \operatorname{ch}(ikh \sin \varphi)}{2i(B - ik \sin \varphi)e^{-ikh \sin \varphi}} \times \sin \varphi \sum_{k=1}^m \frac{1}{n_k} \sum_{p=1}^{n_k} \nu_{kp} \frac{e^{-ikg_k(t_p^{(n_k)}) \cos \varphi} - 1}{\cos \varphi}. \quad (4.1..9)$$

$$\tilde{\Phi}_3(\varphi) = \frac{e^{2ikh \sin \varphi} - 1}{4i} \times \sum_{k=1}^m \frac{1}{n_k} \sum_{p=1}^{n_k} \nu_{kp} e^{-ikg_k(t_p^{(n_k)}) \cos \varphi}. \quad (4.1..10)$$

$$\tilde{\Phi}_4(\varphi) = \frac{ik \sin \varphi \operatorname{ch}(ikh \sin \varphi) + B \operatorname{sh}(ikh \sin \varphi)}{2i(B - ik \sin \varphi)e^{-ikh \sin \varphi}} \times \sum_{k=1}^m \frac{1}{n_k} \sum_{p=1}^{n_k} \nu_{kp} e^{-ikg_k(t_p^{(n_k)}) \cos \varphi}. \quad (4.1..11)$$

4.2. Некоторые результаты численного эксперимента

Был проведен численный эксперимент в широком диапазоне параметров задачи для предкантоновых решеток с числом лент до 32. Приведенные ниже диаграммы направленности поля относятся к случаю с крайевыми условиями Неймана на решетке и экране (пункт 2.1). В этом случае имеется отчетливое преобладание амплитуды рассеянного поля, обусловленное наличием экрана. Разработанная математическая модель дает устойчивые отно-

сительно изменения параметров численные результаты, что в частности было проверено при $kl \sim 50$. Ниже приведены диаграммы направленности рассеянного поля при $l = 6$, $k = 10$, $h = 0, 15$, m — количество лент, n — число узлов интерполирования на каждом интервале множества L .

Автор выражает искреннюю благодарность Ганделю Ю.В. за внимание к данной работе.

Принято к публикации
13 июля 2000 года.

Список литературы

- [1] Федер Е. Фракталы - М.: Мир. - 1991. - 260 с.
- [2] Варшавская Н.А., Гандель Ю.В. Дифракция плоской монохроматической волны на предканторовых решетках // Электромагнитные явления. - 1998. - Т. 1, N 4. - С. 455-464.
- [3] Хенл Х., Мауэ А., Вестфаль К. Теория дифракции. - М.: Мир. - 1964. - 428 с.
- [4] Гандель Ю.В. Метод парных и сингулярных интегральных уравнений в задачах дифракции на ограниченных решетках // Электромагнитные явления - Харьков: ИЭМИ. - 1998. - Т. 1, N 2. - С. 220-232.
- [5] Беймен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. - М.: Наука. - 1966. - 295 с.
- [6] Ахиезер Н.И. Лекции об интегральных преобразованиях. - Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьковском университете. - 1984. - 120 с.
- [7] Гандель Ю.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных зарядов. Ч. I. - Харьков. ХГУ. - 1991. - 67 с.
- [8] Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн - Харьков. ХГУ. - 1992. - 145 с.
- [9] Лифанов. И.К. Метод сингулярных интегралов и численный эксперимент. - М.: ТОО "Янус". - 1995. - 520 с.
- [10] Гандель Ю.В., Лифанов И.К. Новый подход к решению смешанных краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца // Дифференциальные уравнения. - 1998. - Т. 34, N 9. - С. 1246-1253.
- [11] Копсон Э. Асимптотические разложения. - М.: Мир. - 1966. - 160 с.