

О.В. Меньшиков

ДИНАМІЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОЇ ТРІЩИНИ ПІД ВПЛИВОМ НОРМАЛЬНОЇ ГАРМОНІЧНОЇ ХВИЛІ ЗСУВУ

Вступ. При розв'язанні динамічних задач механіки руйнування для тіл з тріщинами необхідно враховувати, що в процесі деформування тіла протилежні береги тріщин можуть взаємодіяти між собою з утворенням областей ковзання, зчеплення та щільного контакту. Врахування контактної взаємодії берегів тріщин під впливом нестационарного навантаження змінює розв'язок задачі не тільки кількісно, але і якісно. Коректна математична постановка задач про динамічне навантаження тіл з тріщинами, а також методика їх розв'язання містяться у роботах Гузя О.М та Зозулі В.В. [1-3]. Дослідження впливу контактної взаємодії берегів тріщин у задачах для площини з прямолінійними тріщинами та простору з круговою тріщиною під впливом гармонічного навантаження було проведено у роботах [1, 3-7].

Постановка задачі. Розглянемо лінійно пружній, однорідний та ізотропний простір R^3 , що містить стаціонарну плоску еліптичну тріщину без початкового розкриття, з поверхнею

$$\Omega = \{0 \leq x_1 \leq a \cos \beta, 0 \leq x_2 \leq b \sin \beta, 0 \leq \beta < 2\pi; x_3 = 0\},$$

під впливом гармонічної хвилі зсуву, що поширюється перпендикулярно поверхні тріщини та задається наступною потенціальною функцією

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0 e^{i(k_2 x_3 - \omega t)},$$

де $\omega = 2\pi/T$ - частота, T - період коливань; Φ_0 - амплітуда; $k_2 = \omega/c_2$ - хвильове число; а $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ - швидкість розповсюдження поперечних хвиль, $\mu > 0$ - постійна Ламе, $\rho > 0$ - густина матеріалу.

Напружено-деформований стан тіла описується рівняннями Ламе лінійної динамічної теорії пружності в переміщеннях

$$A_{ij} u_j(\mathbf{x}, t) = \rho \partial_i^2 u_i(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in R^3 \setminus \Omega, t \in [0, T], \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u_i(\mathbf{x}, t_0) = u_i^0(\mathbf{x}), \partial_t u_i(\mathbf{x}, t_0) = v_i^0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in R^3 \setminus \Omega,$$

де оператор A_{ij} для ізотропного тіла має вигляд

$$A_{ij} = \mu \delta_{ij} \partial_k \partial_k + (\lambda + \mu) \partial_i \partial_j,$$

λ - постійна Ламе, δ_{ij} - символ Кронекера, $\partial_i = \partial/\partial x_i$ та $\partial_t = \partial/\partial t$ - часткові похідні.

На поверхнях протилежних берегів тріщин, що контактують під час деформації, виникають сили контактної взаємодії $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, а взаємні переміщення протилежних берегів характеризуються вектором розриву переміщень

$$\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^+(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}^-(\mathbf{x}, t),$$

де $\mathbf{u}^+(\mathbf{x}, t)$ та $\mathbf{u}^-(\mathbf{x}, t)$ - переміщення протилежних берегів.

Таким чином, навантаження $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ на поверхні тріщини має вигляд

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t) + \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, T],$$

де $\mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t)$ – навантаження, яке є результатом дії падаючої хвилі.

Для нормальних та дотичних компонент векторів сил контактної взаємодії і розриву переміщень на берегах тріщин мають виконуватися такі обмеження у вигляді нерівностей

$$\Delta u_n(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad q_n(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad \Delta u_n(\mathbf{x}, t)q_n(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2)$$

$$|\mathbf{q}_\tau(\mathbf{x}, t)| \leq k_\tau q_n(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \partial_i \Delta \mathbf{u}_\tau(\mathbf{x}, t) = 0; \quad (3)$$

$$|\mathbf{q}_\tau(\mathbf{x}, t)| > k_\tau q_n(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \partial_i \Delta \mathbf{u}_\tau(\mathbf{x}, t) = -\lambda_\tau \mathbf{q}_\tau(\mathbf{x}, t),$$

де $\lambda_\tau = |\partial_i \Delta \mathbf{u}_\tau(\mathbf{x}, t)| / |\mathbf{q}_\tau|$, а $k_\tau > 0$ - коефіцієнт тертя.

Відзначимо, що у розглянутому випадку, враховуючи орієнтацію системи координат, нормальні та дотичні компоненти згаданих векторів мають наступний вигляд

$$\Delta u_n(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \Delta \mathbf{u}_\tau(\mathbf{x}, t) = (\Delta u_1(\mathbf{x}, t), \Delta u_2(\mathbf{x}, t)),$$

$$q_n(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{q}_\tau(\mathbf{x}, t) = (q_1(\mathbf{x}, t), q_2(\mathbf{x}, t)),$$

а для розв'язання задачі достатньо визначити лише дотичні компоненти, які задовольняють обмеженням (3).

Метод розв'язання задачі. Внаслідок того, що область контакту берегів Ω_t залежить від часу, розв'язок задачі для відбитих хвиль не може бути представлений гармонічними функціями. Тому компоненти напружено-деформованого стану задаються рядами Фур'є

$$p_j(\mathbf{x}, t) = \frac{p_{j,\cos}^0(\mathbf{x})}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (p_{j,\cos}^k(\mathbf{x}) \cos(\omega_k t) + p_{j,\sin}^k(\mathbf{x}) \sin(\omega_k t)), \quad (4)$$

$$\Delta u_j(\mathbf{x}, t) = \frac{\Delta u_{j,\cos}^0(\mathbf{x})}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta u_{j,\cos}^k(\mathbf{x}) \cos(\omega_k t) + \Delta u_{j,\sin}^k(\mathbf{x}) \sin(\omega_k t)),$$

де

$$p_{j,\cos}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p_j(\mathbf{x}, t) \cos(\omega_k t) dt, \quad p_{j,\sin}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p_j(\mathbf{x}, t) \sin(\omega_k t) dt, \quad (5)$$

$$\Delta u_{j,\cos}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T \Delta u_j(\mathbf{x}, t) \cos(\omega_k t) dt, \quad \Delta u_{j,\sin}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T \Delta u_j(\mathbf{x}, t) \sin(\omega_k t) dt.$$

Згідно [1-3] коефіцієнти Фур'є векторів навантаження і розриву переміщень берегів тріщин зв'язані для кожного $k = \overline{0, +\infty}$ системою комплекснозначних рівнянь

$$\begin{cases} (p_{1,\cos}^k(\mathbf{x}), -p_{1,\sin}^k(\mathbf{x})) = -\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} (F_{1j}^{\text{Re}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k), F_{1j}^{\text{Im}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)) (\Delta u_{j,\cos}^k(\mathbf{y}), -\Delta u_{j,\sin}^k(\mathbf{y})) d\Omega \\ (p_{2,\cos}^k(\mathbf{x}), -p_{2,\sin}^k(\mathbf{x})) = -\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} (F_{2j}^{\text{Re}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k), F_{2j}^{\text{Im}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)) (\Delta u_{j,\cos}^k(\mathbf{y}), -\Delta u_{j,\sin}^k(\mathbf{y})) d\Omega \end{cases} \quad (6)$$

де $F_{ij}^{\text{Re}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ та $F_{ij}^{\text{Im}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ представляють собою дійсну та уявну частини фундаментального розв'язку динамічної теорії пружності $F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ [1, 3, 5, 7, 8].

Після апроксимації поверхні тріщини множиною плоских багатокутних граничних елементів $\Omega_j, j = \overline{1, N}$ та поділу для всіх $k = \overline{0, +\infty}$ дійсних та уявних частин одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з дійсними корнями

$$\mathbf{F}_{\tau}^k \mathbf{U}_{\tau}^k = \mathbf{P}_{\tau}^k, \quad (7)$$

де

$$\mathbf{F}_{\tau}^k = \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{11}^{k,\text{Re}} & -\mathbf{F}_{11}^{k,\text{Im}} & -\mathbf{F}_{12}^{k,\text{Re}} & -\mathbf{F}_{12}^{k,\text{Im}} \\ \mathbf{F}_{11}^{k,\text{Im}} & -\mathbf{F}_{11}^{k,\text{Re}} & \mathbf{F}_{12}^{k,\text{Im}} & -\mathbf{F}_{12}^{k,\text{Re}} \\ -\mathbf{F}_{12}^{k,\text{Re}} & -\mathbf{F}_{12}^{k,\text{Im}} & -\mathbf{F}_{22}^{k,\text{Re}} & -\mathbf{F}_{22}^{k,\text{Im}} \\ \mathbf{F}_{12}^{k,\text{Im}} & -\mathbf{F}_{12}^{k,\text{Re}} & \mathbf{F}_{22}^{k,\text{Im}} & -\mathbf{F}_{22}^{k,\text{Re}} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U}_{\tau}^k = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{1,\cos}^k \\ \mathbf{U}_{1,\sin}^k \\ \mathbf{U}_{2,\cos}^k \\ \mathbf{U}_{2,\sin}^k \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{P}_{\tau}^k = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{1,\cos}^k \\ \mathbf{P}_{1,\sin}^k \\ \mathbf{P}_{2,\cos}^k \\ \mathbf{P}_{2,\sin}^k \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{F}_{qp}^{k,\text{Re}} = \left[\int_{\Omega_l} F_{qp}^{\text{Re}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}, \omega_k) d\Omega \right]_{l=1, \overline{N}}^{i=1, \overline{N}}, \quad \mathbf{F}_{qp}^{k,\text{Im}} = \left[\int_{\Omega_l} F_{qp}^{\text{Im}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}, \omega_k) d\Omega \right]_{l=1, \overline{N}}^{i=1, \overline{N}},$$

$$\mathbf{U}_{p,\cos}^k = \left\{ \Delta u_{p,\cos}^k(\mathbf{y}_l) \right\}_{l=1, \overline{N}}, \quad \mathbf{U}_{p,\sin}^k = \left\{ \Delta u_{p,\sin}^k(\mathbf{y}_l) \right\}_{l=1, \overline{N}},$$

$$\mathbf{P}_{q,\cos}^k = \left\{ p_{q,\cos}^k(\mathbf{x}_i) \right\}_{i=1, \overline{N}}, \quad \mathbf{P}_{q,\sin}^k = \left\{ p_{q,\sin}^k(\mathbf{x}_i) \right\}_{i=1, \overline{N}}, \quad q, p = \overline{1, 2}; \quad k = \overline{0, +\infty}.$$

де точки \mathbf{x}_j та \mathbf{y}_j розташовані у центрі граничного елемента Ω_j .

Враховуючи вигляд особливостей, які містяться в інтегральних ядрах $F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$, приходимо до висновку, що для обчислення елементів систем лінійних алгебраїчних рівнянь (7) необхідно обчислити гіперсингулярні інтеграли $J_5^{2,0}(\mathbf{x}, \Omega_j)$, $J_5^{1,1}(\mathbf{x}, \Omega_j)$, $J_5^{0,2}(\mathbf{x}, \Omega_j)$ та слабосингулярні інтеграли $J_3^{2,0}(\mathbf{x}, \Omega_j)$, $J_3^{1,1}(\mathbf{x}, \Omega_j)$, $J_3^{0,2}(\mathbf{x}, \Omega_j)$, де

$$J_{\gamma}^{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \Omega_j) = \int_{\Omega_j} \frac{(x_1 - y_1)^{\alpha} (x_2 - y_2)^{\beta}}{\left(\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \right)^{\gamma}} d\Omega. \quad (8)$$

Для регуляризації розбіжних інтегралів (8) був використаний метод, який заснований на застосуванні інтегральної формули Остроградського-Гріна для оператора Лапласа, що дозволяє

зв'язати інтеграли по поверхні з інтегралами по контуру цієї поверхні [3, 9]. Інтеграли, що отримані після регуляризації розбіжних інтегралів по граничних елементах, являють собою криволінійні інтеграли першого типу по контурах відповідних граничних елементів та можуть бути обчислені за допомогою регулярних інтегралів

$$I_{a,b}(\Gamma_{j,l}) = \int_{\Gamma_{j,l}} \frac{y^b dy}{\left(\sqrt{A_l y^2 + B_l y + C_l}\right)^a}$$

де $\Gamma_{j,l}$ - l -ая сторона контура $\partial\Omega_j$.

Для остаточного розв'язання задачі був використаний запропонований у роботах [1, 3] ітераційний алгоритм розв'язання динамічних задач теорії пружності при врахуванні контактної взаємодії берегів тріщин.

Результати чисельного розв'язання. У роботі наведено результати чисельного розв'язання задачі для матеріалу з такими властивостями: модуль пружності $E = 200 \text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуасона $\nu = 0.3$, густина $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$. Зсув відбувається у напрямку Ox_1 .

Для врахування тертя за допомогою обмежень (3) припустимо, що нормальна компонента вектора контактних сил взаємодії є константою та дорівнює одиниці.

Графіки розподілу дотичних компонент векторів контактних сил взаємодії і розриву переміщень у центрі еліптичної тріщини ($a/b = 2$) наведено на Рис. 1, на якому добре видно області ковзання та зчеплення берегів тріщини. Відзначимо, що обмеження (3) виконуються на всій поверхні тріщини на протязі всього періоду коливань.

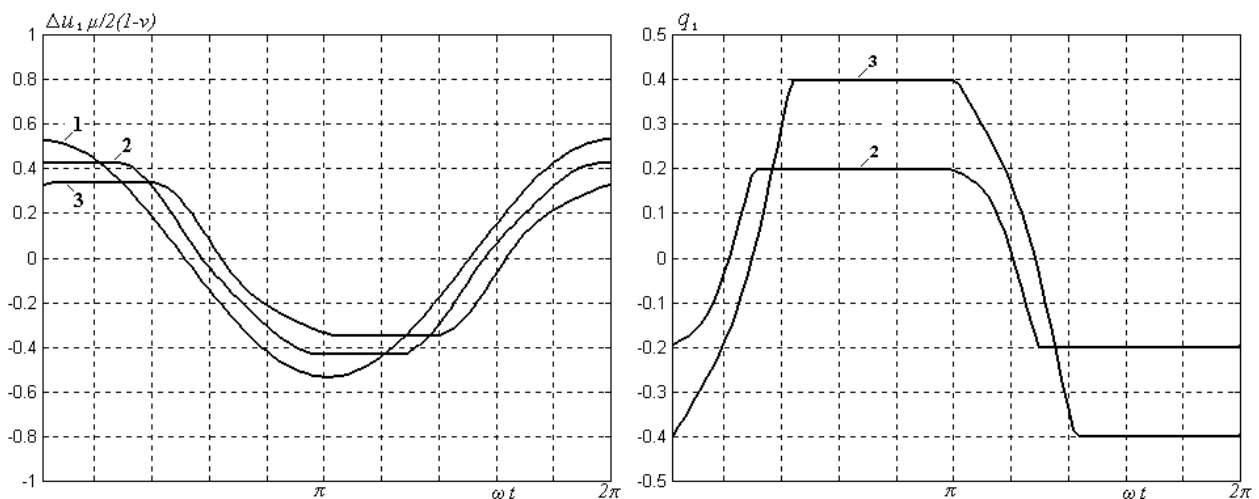


Рис. 1. Розподіл дотичних компонент векторів контактних сил взаємодії і розриву переміщень у центрі тріщини: 1 - без взаємодії, 2- $k_\tau = 0.2$, 3 - $k_\tau = 0.4$

Для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень використовувалися наступні вирази

$$K_{II}(\mathbf{x}, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{4(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \Delta u_\tau^n(\mathbf{x}, t),$$

$$K_{III}(\mathbf{x}, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \Delta u_r^r(\mathbf{x}, t),$$

де $\Delta u_r^n(\mathbf{x}, t)$, $\Delta u_r^r(\mathbf{x}, t)$ - нормальна та дотична компоненти вектора $\Delta \mathbf{u}_r(\mathbf{x}, t)$ в околі краю тріщини; r - відстань до краю тріщини.

Про результати обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень за різних значень хвильового числа $k_2 a$ в околі краю тріщини можна судити з рис. 2 та 3, на яких зображені графіки $|K_{II}^{\max} / K_{II}^{\text{stat}}|$ та $|K_{III}^{\max} / K_{III}^{\text{stat}}|$ при $a/b = 2$.

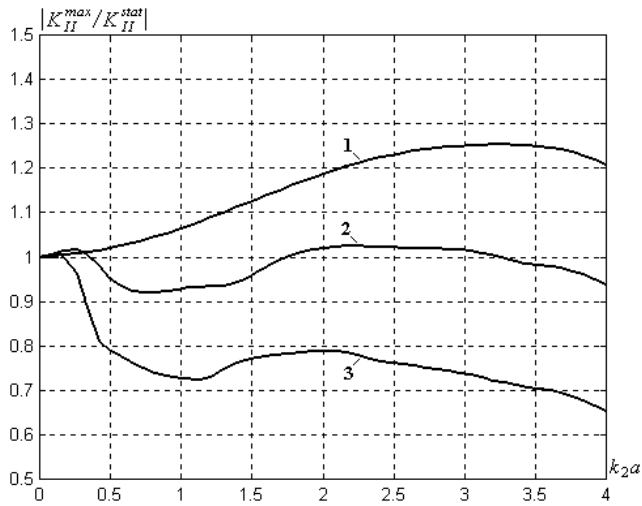


Рис. 2. $|K_{II}^{\max} / K_{II}^{\text{stat}}|$, $\beta = 0$:

1 - без взаємодії, 2- $k_\tau = 0.2$, 3 - $k_\tau = 0.4$

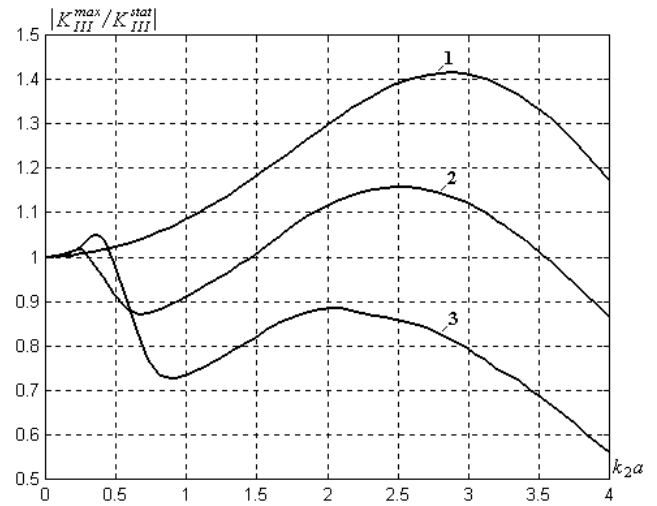


Рис. 3. $|K_{III}^{\max} / K_{III}^{\text{stat}}|$, $\beta = \pi / 2$:

1 – без взаємодії, 2- $k_\tau = 0.2$, 3 - $k_\tau = 0.4$

Врахування контактної взаємодії значно змінює розв'язок задачі. Змінюються величини максимумів коефіцієнтів інтенсивності напружень, а також хвильові числа, за яких вищезгадані максимуми досягаються.

Відзначимо наявність діапазону хвильових чисел, у якому результати, що отримані при врахуванні контактної взаємодії, перевищують відповідні результати, що отримані без врахування контактної взаємодії.

Висновки. Дослідження, результати яких наведено у цій роботі, ще раз доводять необхідність врахування контактної взаємодії берегів тріщин при розрахунках конструкцій на стійкість методами механіки руйнування.

1. Гузь А.Н., Зозуля В.В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках.: Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т. под ред. А.Н. Гузя. Т. 4, книга 2, К., 1993. 236с.
2. Guz A.N., Zozulya V.V. Fracture dynamics with allowance for a crack edges contact interaction // International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2001, 2(3), 173-233.

3. *Guz A.N., Zozulya V.V.* Elastodynamic unilateral contact problems with friction for bodies with cracks // *International Applied Mechanics*, 2002, Vol. 38, № 8, pp. 895-932.
4. *Меньшиков А.В.* Исследование контактного взаимодействия берегов трещины в трехмерном пространстве для случая нормального падения волны растяжения-сжатия // *Доповіді НАН України*. - 2002. - № 6. - С. 52-55.
5. *Меньшиков А.В.* Исследование контактного взаимодействия берегов дискообразной трещины в трехмерном пространстве при гармоническом нагружении // *Вісник Донецького університету. Сер. А: Природничі науки*, 2002, вип. 2, С. 122-126.
6. *Zozulya V.V., Men'shikov A.V.* On one contact problem in fracture mechanics for a normally incident tension-compression wave // *International Applied Mechanics*, 2002, Vol. 38, № 7, pp. 824-828.
7. *Zozulya V.V., Men'shikov A.V.* Contact interaction of penny-shaped crack edges in case of action of a normal shear wave // *International Applied Mechanics*, 2002, Vol. 38, № 9, pp. 97-102.
8. *Зозуля В.В., Меньшиков А.В., Меньшикова М.В.* Применение граничных гиперсингулярных интегральных уравнений в механике разрушения // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2001, вып. 33, С. 57-63.
9. *Zozulya V.V., Gonzalez-Chi P.I.* Weakly singular, singular and hypersingular integrals in elasticity and fracture mechanics // *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 1999, **22**(6), pp. 763-775.

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

Україна, 61124, м. Харків, вул. Матросова 8, кв. 8., Меньшикову Олександрову Васильовичу

Тел. (0572) 52-45-77